Modification du Noyau Intégral de Stokes : Etude des Performances

N. RABEHI, M. AARIZOU
Centre des Techniques Spatiales, Division de Géodésie Spatiale
BP 13 Arzew - 31200 – Algérie, Email : Rabehin@gmail.com

ملخص :

لتحديد قيم الجيود حسب طريقة ستوكس نستعمل قيم الجاذبية الموزعة على مستوى كل سطح الأرض ؛ لكن مع عدم توفرهذه التغطية الكاملة و لحساب دقيق لتكامل ستوكس نتبع المنهجية التي ترتكز على معرفة قيم الجاذبية في منطقة معينة. هذا القطع يتولد عنه أخطاء التي نقوم بتقليصها عن طريق تغيير نواة تكامل ستوكس.

Résumé : La détermination du géoïde par la méthode de Stokes exige au préalable des données gravimétriques bien réparties sur la totalité de la terre. En revanche, dans le cas d'une absence d'une couverture gravimétrique globale, la méthodologie adoptée pour résoudre l'intégrale de Stokes repose uniquement sur la connaissance de la gravité locale où la zone d'intégration est limitée.
Par conséquent, la procédure de troncature du domaine d'intégration engendre des erreurs qui peuvent perturber d'une façon significative l'estimation du géoïde. Afin de minimiser les effets de ces erreurs et de garantir une solution fiable, nous proposons à travers cet article une technique connue sous le nom "modification du noyau intégral de Stokes".

Mots clés : noyau de Stokes, domaine d'intégration, troncature, modification du noyau, déterministe, stochastique, géoïde local.

Abstract : The geoid determination by the method of Stokes requires gravity data evenly distributed over the entire of the Earth.
However, and with the absence of the global gravity measurement the methodology adopted to solve the Stokes integral computation take into account only the local gravity, limiting the integral just over the computation area.
This truncation generates errors that can perturb significantly the estimation of geoid. So, to minimise the effects of these errors and ensure a reliable solution, we proposed throughout this article a technique known as "Stokes kernel modification".

Keywords : Stokes's Kernel, area of integration, truncation, modified kernel, deterministic, stochastic, local geoid.

1. Introduction

L'application de la formule de Stokes sur une échelle locale, nous conduit à tronquer le domaine d'intégration en tenant compte seulement de la zone d'étude. Par conséquent, cette troncature engendre des erreurs sur la détermination de l'ondulation du géoïde. Dans le but de réduire les effets de ces erreurs, nous introduisons une technique appelée modification du noyau intégral de Stokes.
C'est dans ce contexte que s'inscrit le thème de cet article dont l'objectif principal consiste en une étude des performances de la modification du noyau intégral de Stokes qui est basée sur les deux approches suivantes :

- La première approche dite "stochastique" porte sur l'étude statistique des erreurs dues à la troncature du domaine d'intégration, aux anomalies de gravité terrestres et aux coefficients du modèle géopotentiel global [Argen et Sjoberg, 2003].
- La seconde approche appelée "déterministe" consiste uniquement à minimiser l'erreur de cessus de convergence rapide de la série d'erreur de troncature (Meissl, Wong et Gore, Hec et Gruninger, Vanicek et Kleusberg, Featherstone et al..).

2. Généralités sur le noyau intégral de Stokes

L'intégrale définie sur la sphère unitaire est donnée par l'expression suivante:

$$\int_{\sigma} K(\psi).\, f(\sigma').d\sigma' \qquad (1)$$

Où $K(\psi)$ le noyau de l'intégrale qui s'exprime sous forme d'une série infinie orthogonale en fonction des polynômes de Legendre :

$$K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} a_n.P_n(\cos\psi) \qquad (2)$$

Avec :

$$a_n = \int_0^{\pi} K(\psi).\, P_n(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi \quad , \quad \forall\, n = 0, 1, 2, ..;$$

Si $K(\psi)$ est une fonction continue, sa première et deuxième dérivées sont continues, par suite, la série (2) converge vers 0.

L'intégrale (1) peut être écrite sous forme d'une série infinie des harmoniques sphériques Y_n :

$$\int_{\sigma} K(\psi).\, f(\sigma')d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, Y_n(\sigma) \qquad (3)$$

Où ;

$$Y(\sigma_n) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\sigma')P_n(\cos\psi)\,d\sigma' \quad ; \quad \forall\, n = 0, 1, 2, ... \quad ;$$

On définit la fonction $K^*(\psi)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ comme suit :

$$K^*(\psi) = \begin{cases} K(\psi) & si \quad 0 \le \psi \le \psi_0 \\ 0 & si \quad \psi_0 < \psi \le \pi \end{cases} \qquad (4)$$

$$K^*(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} s_n(\psi_0).P_n(\cos\psi) \qquad (5)$$

$K^*(\psi)$ s'exprime sous forme d'une série orthogonale en fonction des polynômes de Legendre ; elle est discontinue au point $\psi = \psi_0$.

3. Modification du noyau intégral de Stokes

En géodésie, l'ondulation du géoïde est donnée par le biais d'une forme modifiée de l'intégrale de Poisson et elle s'écrit comme suit: [Heiskanen et Moritz, 1967] :

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_{\sigma} \Delta g(\psi).\, S(\psi).d\sigma' \qquad (6)$$

En pratique, cette ondulation est donnée sous forme d'une somme de la contribution des zones proches et lointaines que l'on minimise en utilisant l'inégalité de Schwartz. Cette minimisation tient compte de l'orthogonalité des harmoniques sphériques, de l'utilisation des anomalies de gravité résiduelles et de l'insuffisance des données gravimétriques terrestres sur la totalité de la Terre.

$$[\delta N(\psi)]^2 \le k^2 \|\Delta g\|^2 \|S(\psi)\|^2 \qquad (7)$$

Δg est une constante alors que $\|S(\psi)\|$ varie en fonction du paramètre de modification $s_n(\psi)$; Ainsi, la minimisation de l'erreur de troncature introduite sera basée sur l'étude de la minimisation de $\|S(\psi)\|$ telle que :

$$\forall\, i \in R : \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma - C} [S(\psi)]^2\, d\sigma' = 0 \qquad (8)$$

Par suite, le noyau modifié s'exprimera en fonction du noyau sphérique original $S(\psi)$ et du coefficient de modification s_n comme suit :

$$S^M(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{M} \frac{2n+1}{2} s_n P_n(\cos\psi) \qquad (9)$$

La valeur du coefficient s_n définie à partir du degré $n = 2$, diffère généralement d'une méthode de troncature à l'autre. Sa formule est bien déterminée dans le cas d'approches déterministes. Par contre, au niveau des modifications stochastiques, elle varie en fonction d'autres paramètres [Ellmann. A, 2004].

3.1 Noyaux déterministes

Les noyaux déterministes ne tiennent pas compte des erreurs dues aux coefficients du modèle et des anomalies de gravité terrestres. Cette approche dite "déterministe" repose uniquement sur la *minimisation de l'erreur de troncature* et elle est appliquée dans le cas où l'aspect statistique de ces erreurs est méconnu.

Comme première modification, on trouve le noyau sphéroïdale qui consiste à enlever du noyau sphérique original de Stokes les (M-1) premiers termes de sa série qui interviennent dans la contribution du modèle géopotentiel. Ceci, permet d'obtenir un filtrage des données gravimétriques de basses fréquences.

$$S^M(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{M} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \qquad (10)$$

Le noyau de *"Wong and Gore"* utilise la même méthode de troncature relative au noyau sphéroïdal de Stokes. Le degré de modification utilisé dans ce cas est égal à L, degré de développement du modèle sphéropotentiel. Ceci, permet de réduire l'instabilité de la fonction du noyau sphéroïdal de Stokes pour les grands degrés de n. De ce fait, on choisit le degré de modification tel que L < M tout en tenant compte de l'hypothèse sur la fiabilité de la précision des anomalies de gravité obtenues par l'analyse d'orbites des satellites en vue de la détermination du sphéroïde utilisé [Rabehi. N, 2004].

La méthode de modification de *"Meissl"* consiste à soustraire du noyau sphérique de Stokes la valeur du noyau à la distance sphérique ψ_0.
Cette modification permet d'obtenir un noyau sous forme d'une fonction continue en ψ_0 Cette propriété permet d'obtenir une convergence rapide de la série d'erreur de troncature [Featherstone. W.E et al., 1998].
La modification de *"Heck and Gruninger"* est similaire à celle de "Meissl", sauf que la soustraction est appliquée au noyau sphéroïdal de Stokes. Il s'agit de soustraire du noyau sphéroïdal de Stokes sa valeur au point de distance sphérique $(\psi = \psi_0)$. Le but est de rendre continue la fonction du noyau sphéroïdal de l'erreur ainsi modifiée.
Le noyau de *"Heck and Gruninger"* est donné par :

$$S^{HG} = \begin{cases} S^L(\cos\psi) - S^L(\cos\psi_0) & si \quad 0 \le \psi \langle \psi_0 \\ 0 & si \quad \psi_0 \le \psi \le \pi \end{cases} \tag{11}$$

Les procédés de modification, présentés ci-dessus, consistent à transformer le noyau sphérique de Stokes correspondant à un domaine d'intégration sur toute la sphère, en un noyau intégral approprié qui correspond au domaine d'intégration imposé par la zone locale. Ces modifications ont pour but de filtrer, selon le choix du degré de troncature, les anomalies de gravité de basses fréquences, supposées de qualité fiable.
Pour que la transformation du noyau intégral soit plus fiable, on procède à la modification du noyau de Stokes avec le critère de rendre minimale l'erreur engendrée par la zone de troncature.
Le critère de minimisation, par la méthode des moindres carrés, utilisé par "Vaniček et Kleusberg", porte sur l'erreur de troncature δN_l, avec l'hypothèse que le modèle des coefficients géopotentiel et les anomalies de gravité terrestre sont supposés non entachés d'erreurs.
La méthode de minimisation de l'erreur moyenne quadratique nous mène ainsi à un système de (L-1) équations linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \sum_{k=2}^{L} \frac{2k+1}{2} t_k(\psi_0) e_{nk\,k}(\psi_0) = Q_n^{WG}{}_k(\psi_0) \;\; ; \;\; 2 \le n \le L \\ Q_n^{WG}(\psi_0) = Q_n(\psi_0) - \sum^{L} \frac{2k+1}{k-1} e_{nk}(\psi_0) \end{cases} \tag{12}$$

$Q_n^{WG}(\psi_0)$ est le coefficient de troncature de "Wong" et "Gore".
On peut considérer cette approche comme un cas particulier de la modification de "Sjöberg", $2 \le n \le L$ définis par la suite.
D'autre part, on trouve le noyau sphéroïdal modifié hybride.

Il existe une autre technique de modification (noyau sphéroïdal modifié hybride) basée sur la combinaison de deux approches où on applique la soustraction de "Meissl" sur le noyau sphéroïdal modifié par "Vaniček et Kleusberg", pour obtenir la continuité de la fonction de ce noyau [Fetherstone.W.E. et al., 1998] :

$$S_F(\cos\psi) = S_{WG}(\cos\psi) - S_{WG}(\cos\psi) - \sum_{k=2}^{L} \frac{2k-1}{2} t_k(\psi_0) [P_k(\cos\psi) - P_k(\cos\psi_0)] \tag{13}$$

Cette approche de modification tient compte de toutes les propriétés définies dans les autres noyaux le choix du degré sphéropotentiel de troncature L, la continuité de la fonction du noyau de l'erreur et la minimisation de l'erreur de troncature au sens des moindres carrés.
La figure 1 met en évidence le comportement du noyau de "Featherstone et al." (noyau hybride : Meissl-Molodensky modifié) par rapport aux noyaux de "Vaniček et Kleusberg" et sphérique, pour la distance sphérique $\psi_0 = 4°$ correspondant à la zone de troncature.

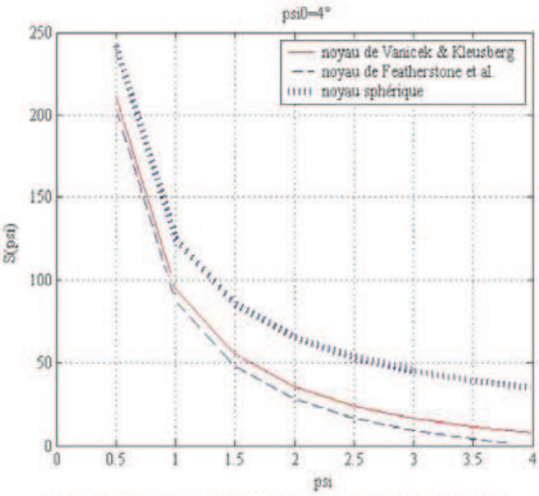

Fig. 1 Noyaux de "Featherstone et al.", de "Vaniček and Kleusberg" et sphérique pour $\psi_0 = 4°$.

La figure 1 montre que le noyau de "Featherstone" et al. décroît plus rapidement que les autres noyaux et prend la valeur zéro pour la distance sphérique $\psi_0 = 4°$ choisie.
Théoriquement, la méthode de modification de "Featherstone & al." tient compte des propriétés de toutes les modifications déterministes présentées dans cet article.

3.2 Noyaux stochastiques

La méthode proposée par "Sjöberg" a pour but de minimiser, au sens des moindres carrés, toute source d'erreurs affectant le calcul du géoïde. Ces erreurs (relation 14) sont principalement dues aux effets des anomalies de gravité terrestres δN_0 de la zone d'étude, de la troncature du domaine d'intégration δN_1 et des coefficients du modèle géopotentiel δN_2 [Ellmann.A, 2001], telles que :

$$\delta N = \delta N_0 + \delta N_1 + \delta N_2 \tag{14}$$

Cette approche est dite stochastique du fait que les valeurs des erreurs, en général, n'étant pas bien connues. Dans ce cas, on adopte des modèles standard de variance en prenant le soin de bien choisir le modèle géopotentiel.

Ainsi, l'erreur moyenne quadratique des ondulations du géoïde est représentée par la norme de l'erreur globale qui est la somme des contributions partielles des erreurs [Ellmann. A, 2004] :

$$m_{\tilde{N}}^2 = \left\|\delta N_{SJ}\right\|^2 = E\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \left(\tilde{N}_{SJ} - N\right)d\sigma\right\} \tag{15}$$

$$m_{\tilde{N}}^2 = c^2\sum_{n=2}^{M}\left(s_n^{SJ}\right)^2 dc_n + c^2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(Q_n^{SJ}\right)^2 c_n + \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^{SJ} - s_n^*\right)^2 .\sigma_n^2\right]$$

Q_n^{SJ} est le coefficient de troncature de "Sjöberg" dont la forme générale est donnée en fonction du coefficient de troncature sphérique Q_n et des coefficients de Paul e_{nk} . Son expression est définie par "Paul et Hagiwara" jusqu'au degré maximum 2000 et du paramètre de modification [Ellmann. A, 2001] :

$$Q_n^{sj}(\psi) = Q_n(\psi) - \sum_{n=2}^{L}\frac{2n+1}{2}s_n^{Sj}.e_{nk} \tag{16}$$

Où c_n, dc_n et σ_n^2 représentent respectivement la variance de degré n des anomalies de gravité, la variance de degré n des erreurs des anomalies de gravité et la variance de degré n des erreurs des anomalies de gravité terrestres.

L'équation (15) est composée de trois parties : La première représente la contribution due aux erreurs des coefficients du modèle et elle s'écrit en fonction du paramètre de modification s_n^{SJ} et de la variance de degré n des erreurs des anomalies de gravité déterminées à partir du modèle. La seconde reflète l'erreur de troncature et la dernière indique l'influence des erreurs des données terrestres.

Le paramètre de modification s_n^{SJ} dépend de la qualité des données, du rayon de troncature choisi et des caractéristiques du modèle géopotentiel utilisé. Afin d'estimer sa valeur, on dérive l'erreur moyenne quadratique $m_{\tilde{N}}^2$ par rapport à s_n^{SJ}:

$$\frac{\partial}{\partial s_k^{SJ}}\left\|\delta N\right\|^2 = 0 \qquad k = 0,1,\ldots,M \tag{17}$$

Le système d'équation obtenu est linéaire, du type AX = b, que l'on résout par moindres carrés.

A représente une matrice symétrique de coefficients a_{kr}, X représente le paramètre s_k^{SJ} et b le coefficient h_k:

$$a_{kr} = a_{kr} = \frac{2k+1}{2}.\frac{2r+1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}e_{nk}e_{nk}\left(\sigma_n^2 + c_n\right) +$$

$$+\left(\sigma_r^2 + dc_r\right)\delta_{kr} - \frac{2k+1}{2}e_{kr}\sigma_r^2 - \frac{2r+1}{2}e_{rk}\sigma_k^2$$

$$h_k = \frac{2k+1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[Q_n\left(\sigma_k^2 + c_n\right) - \Omega_n\right]e_{nk} + \Omega_k - Q_k\sigma_k^2$$

Avec $$\Omega_n = \frac{2\sigma_n^2}{n-1}$$

Théoriquement, le paramètre de modification s_n ne dépend que du degré. Par contre s_n^{SJ} varie en fonction du rayon de troncature choisi, de la qualité des données, et des caractéristiques du modèle géopotentiel utilisé. Cette méthode de minimisation de la moyenne quadratique de l'erreur globale rend le paramètre de modification s_n^{SJ} plus performant.

4. Etude des coefficients de troncature

La première modification fut apportée par "Molodensky" [Molodensky. M.S et al., 1962] au noyau original (sphérique) de Stokes en vue de réduire l'effet de troncature. Cette modification mène à la série infinie suivante :

$$\delta N_1 = c\sum_{n=M+1}^{\infty}Q_n\left(\psi_0\right)\Delta g_n \tag{18}$$

Les coefficients qui s'expriment en fonction du noyau original de Stokes sont déterminés de la manière suivante :

$$Q_n\left(\psi_0\right) = \int_{\psi_0}^{\pi}S(\psi)P_n(\cos\psi)\sin\psi d\psi \tag{19}$$

Le coefficient sphéroïdal de troncature s'écrit en fonction du coefficient de troncature correspondant au noyau sphérique de Stokes défini précédemment et d'un coefficient e_{nk} déterminé numériquement à l'aide des formules de récurrence de "Paul" (1973) [Chuanding.Z et al., 1998].

$$Q_n^M\left(\psi_0\right) = Q_n\left(\psi_0\right) - \sum_{k=2}^{M}\frac{2k+1}{k-1}e_{nk}\left(\psi_0\right) \tag{20}$$

Le coefficient sphéroïdal de troncature devient instable au voisinage du degré 360 (figure 2). Cette divergence est éliminée par "Wong et Gore" en soustrayant les degrés L du noyau sphérique tel que $L \le M$.

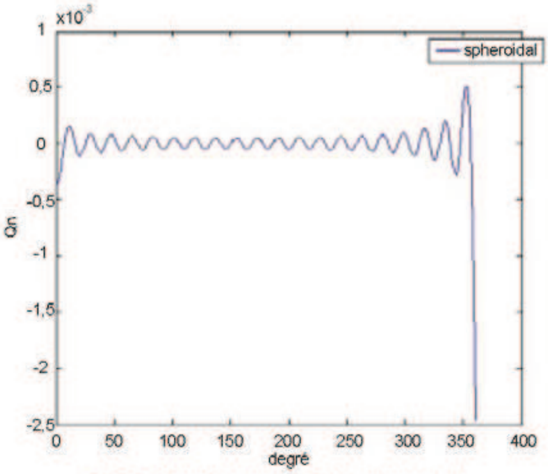

Fig. 2 Coefficient sphéroïdal de troncature

En général, on prend le degré de modification L égal à *20* (limite du degré des coefficients harmoniques précis). La propriété de la convergence du coefficient de troncature a conduit "Meissl" à considérer sa modification par la simple soustraction qui mène à la continuité de la fonction du noyau de l'erreur à la distance sphérique $\psi = \psi_0$.

Afin de développer l'expression explicite du coefficient de troncature de "Meissl", on utilise la formule générale de la seconde identité de "Green" [Featherstone.W.E et al.,1998].

Ainsi, le coefficient de troncature de "Meissl" s'exprime comme suit :

$$Q_n^F(\psi_0) = Q_n(\psi) + \frac{S(\psi_0)}{(n+1)}\left[P_{n-1}(\cos\psi_0) - \cos\psi_0 . P_n(\cos\psi)\right]$$

L'utilisation de la méthode des moindres carrés dans la définition de certains paramètres du noyau permet une minimisation de l'erreur bien meilleure que les noyaux sphéroïdal et sphérique. [Vaniček et Featherstone, 1998]

Le coefficient de troncature de "Vaniček et Kleusberg" (figure 3) prend des valeurs plus petites que les autres coefficients. Son oscillation s'affaiblit tout en augmentant le degré et converge vers zéro pour des grandes valeurs de n.

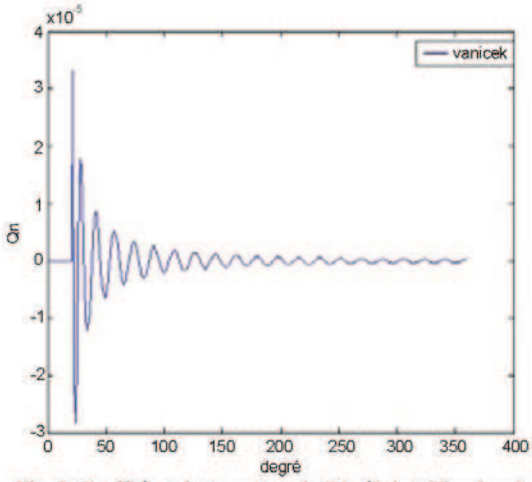

Fig. 3 Coefficient de troncature de "Vaniček et Kleusberg".

La détermination de la nature de la série d'erreur de troncature dépend de la forme explicite de son coefficient de troncature qui est lié à la continuité ou à la discontinuité du noyau de l'erreur sur l'intervalle $[0,\pi]$.

Mais, avec l'utilisation de la soustraction de "Meissl" et la considération des propriétés des polynômes de Legendre, il en résulte que:

$$Q_n^{me} \le O\left(n^{-2}\right) \quad pour \quad n \to \infty \tag{21}$$

On conclut que la série spectrale de l'erreur de troncature est une série convergente.

La modification de "Featherstone et al." est une combinaison de deux approches puisqu'elle utilise la méthode des moindres carrés étudiée par "Vaniček et Kleusberg" pour la minimisation de l'erreur de troncature et la soustraction de "Meissl" pour la convergence rapide de la série d'erreur de troncature. Cette approche de modification tient compte de toutes les propriétés définies dans les autres noyaux à savoir : le choix du degré sphéropotentiel de troncature n, la continuité de la fonction du noyau de l'erreur et la minimisation de l'erreur de troncature au sens des moindres carrés.

5. Conclusion

L'idée principale de "Molodensky" consistait à enlever du noyau sphérique de Stokes les termes correspondant aux degrés inférieurs de sa série. Ceci, permettrait un filtrage des erreurs de petites fréquences. Cette vision ayant évoluée suite aux travaux de "Wong" et "Gore" révélant une instabilité du coefficient sphéroïdal de troncature pour les degrés supérieurs.

A cet effet, le degré de modification a été limité à celui du modèle sphéropotentiel. D'autre part, l'approche de "Meissl" qui prend en considération la continuité de la fonction du noyau de l'erreur, consiste à soustraire du noyau sa valeur au rayon de troncature et mène ainsi à la convergence rapide de la série d'erreur de troncature.

L'idée de l'utilisation de la minimisation de l'erreur de troncature au sens des moindres carrés dans la détermination du noyau est très intéressante. En pratique, cette modification a donné de bons résultats dans différentes régions de la Terre.

Les modifications *déterministes* ne tiennent pas compte des erreurs dues aux coefficients du modèle géopotentiel et aux biais dus aux anomalies de pesanteur terrestre. Ces différentes estimations n'étant pas assez connues, "Sjöberg" a introduit l'usage des modèles standard de variance pour les représenter dans une modification dite *stochastique*.

Par contre, lorsque la variance des données est disponible et fiable, les modifications stochastiques offrent une combinaison de deux types de données avec une minimisation de l'erreur globale représentant la somme de toute source d'erreur.

Le but de cette étude comparative entre les différents noyaux modifiés, développé à travers cet article, est de procéder au choix d'un noyau convenable pour la détermination précise du géoïde.

Par ailleurs, en cas du manque d'informations sur les données gravimétriques et sur les coefficients du modèle géopotentiel, il est souhaitable l'usage des modifications déterministes, plus précisément les noyaux modifiés en utilisant la méthode des moindres carrés. Ce choix est consolidé par le fait que théoriquement cette modification englobe toutes les propriétés des différents noyaux.

Références Bibliographiques

Ågren. J, Sjöberg. L.E 2003 : *"Comparison of some methods for modifying stokes' formula in the goce era"*. Royal Institute of Technology, Sweden 2003.

Ellmann. A 2001 : *"Least square modification of Stokes formula with application to the Estonian geoid"*. Geodesy report No. 1056, Royal Institute of Technology (Kungl Tekniska HOGSKOLAN)

Chuaning. Z, Zhonglian. L, Xiaoping. W, 1998 : *"Truncation error formulae for disturbing gravity vector"*. Journal of geodesy, 72:119 - 123.

Ellmann. A, 2004 : *"The geoid for the Baltic countries determined by the least squares modification of Stokes' formula"*. Doctoral Dissertation in geodesy report No. 1061, Royal Institute of Technology (Kungl Tekniska Hogskolan).

Evans. J.D, Featherstone. W.E, 2000 : *"Improved convergence rates for the truncation error in gravimetric geoid determination"*. Journal of geodesy, 74: 239-248

Featherstone. W.E, Evans. J.D, Olliver J. G 1998 : *"A Meissl–modified Vaniček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations"*. Journal of geodesy, 72: 154- 160.

Heiskanen. W. A , Moritz. H 1967 : *"Physicalg Geodesy"*. W.H Freeman & company.San Francisco 1967.

Molodenskii. M.S, Eremeev. V.F, Iyurkina. M, 1962 : *"Methods for study of the Externel Gravitational Field and Figure of the earth"*. Israel programme for the Translation of the Scientific Publications

Rabehi. N, 2004 : *"Troncature du noyau intégral de Stokes_Etude des performances"*. Mémoire de magister. CNTS Arzew. Novembre 2004.

Vaniček. P, Featherstone. W.E, 1998 : *"Perfor mance of three types of Stokes' kernel in the combined solution for the geoid"*. Journal of geodesy, 72: 684- 697.