

DYNAMIQUE CHAOTIQUE DES PARTICULES RELATIVISTES ACCELERÉES PAR UN CHAMP ELECTRIQUE DANS UN PAQUET D'ONDES ELECTROSTATIQUE

DYNAMIC CHAOTIC OF RELATIVISTIC PARTICLES ACCLERATED BY AN ELECTRIC FIELD IN AN ELECTROSTATIC WAVE A PACKET

A. RAOUAK, D. SAIFAOUI⁽¹⁾, A. DEZAIRI⁽²⁾

Institut de Formation Technique ,105 rue Sergent Med Missaoui AinBordja Casa Maroc
Fax :19-212-22-618842 , E-mail : rouak@efet.ac.ma

⁽¹⁾Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Ain Chock Casa Maroc

⁽²⁾Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Ben M'Sik Casa Maroc

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de la dynamique chaotique des particules accélérées dans un paquet d'ondes électromagnétiques en utilisant les simulations numériques du mapping standard relativiste. Il est démontré que la diffusion est en général moins effective que celle associée au cas non relativiste. Le mapping standard est une famille à deux paramètres ($K, \beta = \omega/\kappa c$), caractérisant les systèmes dynamiques. Elle se réduit au mapping standard (d'un seul paramètre K) quand $\beta \rightarrow 0$ (i.e. $\omega \ll \kappa c$ limite classique). Pour $\beta \neq 0$ l'augmentation de la masse relativiste supprime l'unicité de la stochasticité [4]. Dans notre travail nous avons aussi présenté par nos simulations les régimes de transition vers la stochasticité globale.

ABSTRACT

In this work, we have interested to a chaotic dynamic of particle acceleration in the electric field of an electrostatic wave packet, by using numerical simulation of the relativistic standard map. It is shown that the diffusion is in general less affective than that for non relativistic particles. The relativistic standard map is a two-parameter ($K, \beta = \omega/\kappa c$), family of dynamical system reduced to the standard when $\beta \rightarrow 0$ (ie $\omega \ll \kappa c$ classical limit), for $\beta \neq 0$ the relativistic mass increases suppresses the onest of stochasticity [4]. in our work we present a contribution to a numerical simulation of the transition regimes to a global stochasticity

Mots clés : Diffusion, Mapping, Stochastique

1. INTRODUCTION:

Dans notre travail, nous avons utilisé une généralisation du mapping standard [3]. Cette généralisation est basée sur des problèmes de la physique des plasmas, servant ainsi comme champ d'étude. Mais en outre, une interprétation mécanique sera donnée.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude de l'effet relativiste sur les propriétés de l'accélération des particules ainsi qu'aux aspects qualitatifs de la diffusion qui apparaissent en appliquant la généralisation du mapping standard.

Dans ce travail, nous présentons dans le premier paragraphe le mouvement relativiste d'un électron sous l'effet d'un champ électrique E , et dans le deuxième paragraphe nous exposons le mapping standard afin

d'étudier la diffusion stochastique en utilisant la technique de fourrier [1]. Nous présentons, dans le troisième paragraphe, les résultats numériques par l'étude des caractéristiques du mouvement des particules en mettant en relief la transition à la stochasticité globale (étude de la diffusion). Nous avons élaboré une méthode numérique basée sur le mapping pour détecter le passage d'une trajectoire de l'état piégé à l'état stochastique. Cette méthode nous a permis de retrouver la constante de chircov [6,7,8].

La compréhension des phénomènes de stabilité et de diffusion des mouvements non linéaires des particules chargées et accélérées par un champ électromagnétique a été avancée et mise en exergue par des études du mapping standard, avec un seul paramètre K . Le mapping standard s'applique à une large classe de problèmes incluant le confinement des particules dans les appareils à fusion

magnétique [3,4].

2. DYNAMIQUE NON LINEAIRE DU MAPPING STANDARD RELATIVISTE (MSR)

Considérons un paquet d'onde relativiste ayant une amplitude constante E_0 , κ étant un nombre d'ondes donné et un spectre infini de fréquences harmoniques ω .

Le paquet d'ondes est décrit comme suit [3,4,5,]:

$$E(x,t) = E_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin(\kappa x - n\omega t) \quad (1)$$

Le mouvement relativiste d'un électron de masse au repos m_0 et de charge électrique $-e$, constante sous l'effet d'un champ électrique, est déterminé par l'hamiltonien suivant :

$$H(x,t) = (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{\frac{1}{2}} - e\phi(x,t) \quad (2)$$

où $\phi(x,t)$ est le potentiel électrique, c est la vitesse de la lumière, p est la quantité de mouvement relativiste.

$$\Phi(x,t) = \frac{E_0}{\kappa} \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos(\kappa x - n\omega t) \quad (3)$$

En faisant appel aux équations d'hamilton jacobi [4], nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p^2 c^2}{(p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -eE_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin(\kappa x - n\omega t) \quad (5)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sin(\kappa x - n\omega t) = \frac{2\pi}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi n}{\omega}\right) \sin(\kappa x) \quad (6)$$

Dans l'étude de ce type de problème, il est plus commode de normaliser les variables de l'espace de phase x , p et le temps t , en introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$X = \frac{\kappa}{2\pi} x, P = \frac{\kappa}{m_0 \omega p}, T = \omega t \quad (7)$$

Ainsi, les équations du mouvement hamiltonien (5) et (6) se réduisent à une description analytique de surface de section de Poincaré (Map) dans le plan (X, P) obtenu sur les impulsions données en (6).

3. MAPPING STANDARD RELATIVISTE (MSR)

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment nous pouvons remplacer les équations du mouvement par un mapping [4].

La représentation de Poincaré dans le plan $X = 0 \pmod{2\pi}$ se réduit au mapping suivant à l'instant $T_n = 2\pi n$.

Pour étudier l'évolution du système dans le plan de phase (P, X) , nous avons simulé les équations du mouvement sous forme du mapping standard généralisé de type suivant:

$$P_{n+1} = P_n + F(X_n) \quad (8)$$

$$X_{n+1} = X_n + G(P_{n+1}) \quad (9)$$

Les fonctions F et G sont telles que:

$$F(X) = -\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi X) \quad (10)$$

$$G(P) = \frac{P}{(1 + \beta^2 P^2)^{1/2}} \quad (11)$$

Les paramètres K et β sont donnés par :

$$K = \frac{4\pi_2 e E_0 \kappa}{m_0 \omega^2}, \quad \beta = \frac{\omega}{\kappa c} \quad (12)$$

Le mapping à deux dimensions défini par les équations (8) à (11) se réduit au mapping standard classique (non relativiste ou newtonien) dans la limite bêta tendant vers zéro.

4. SIMULATIONS NUMERIQUES

Dans le but d'étudier l'évolution de la stochasticité des trajectoires des particules accélérées dans un paquet d'ondes électromagnétiques, nous avons représenté dans le plan (P, X) les résultats des simulations sur les figures 1, 2, 3, 4 et 5. Ces courbes sont celles de KAM [1] qui évoluent en fonction du paramètre relativiste β . Toutes les figures correspondent à la simulation du mapping standard pour une valeur de K supérieure à K_c où $K_c = 0,97$ est la constante de Chirikov. Sur ces figures, nous relevons à la fois l'existence de trajectoires régulières et stochastiques, alors que le nombre de trajectoires stochastiques diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne du cas classique. Par contre, sur les figures 4 et 5, nous avons simulé les équations avec des valeurs de β supérieures à l'unité et la majorité des trajectoires deviennent alors piégées.

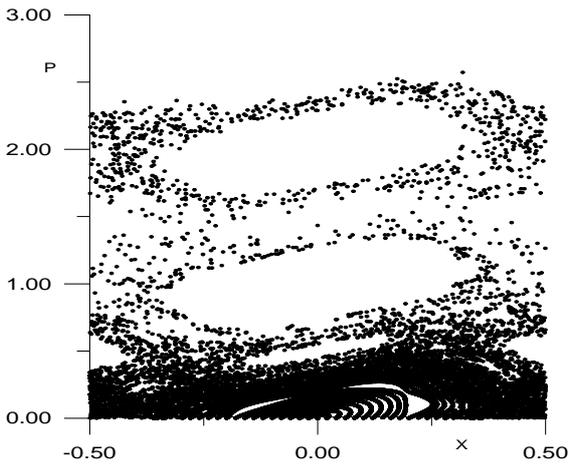


Figure 1 : Orbits des particules dans le mapping standard relativiste pour un paramètre de stochasticité $K = 1.3$ et un paramètre relativiste $\beta = 0.0\pi$.

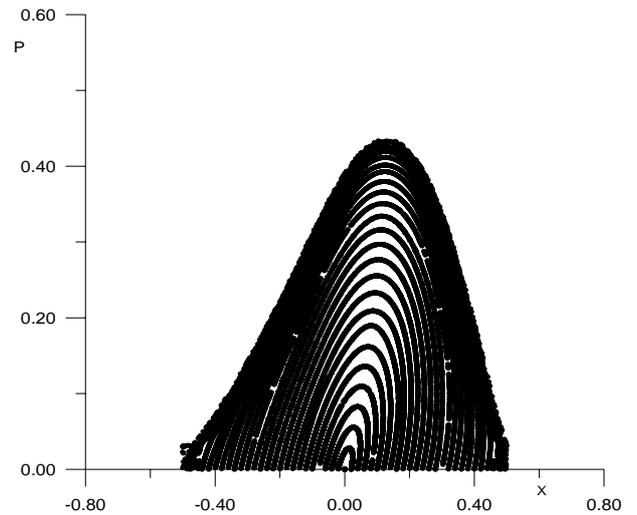


Figure 4 : Orbits des particules dans le mapping standard relativiste pour un paramètre de stochasticité $K = 1.3$ et un paramètre relativiste $\beta = \pi$.

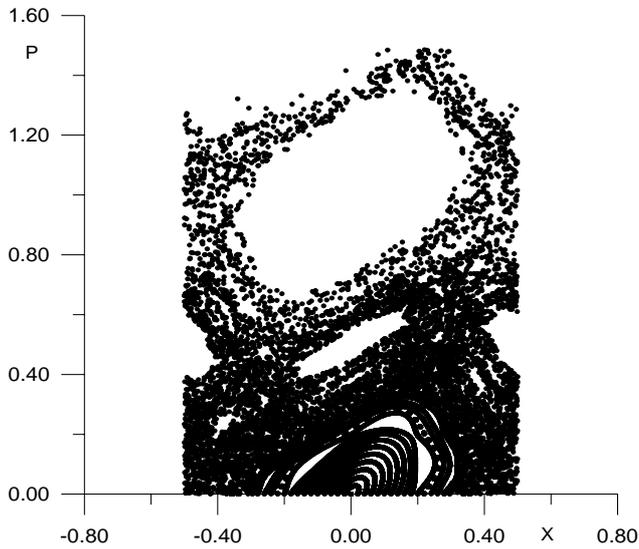


Figure 2 : Orbits des particules dans le mapping standard relativiste pour un paramètre de stochasticité $K = 1.3$ et un paramètre relativiste $\beta = 0.04\pi$.

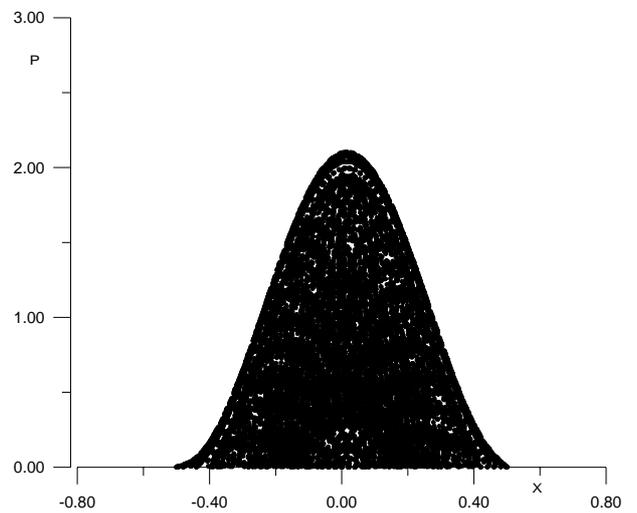


Figure 5 : Orbits des particules dans le mapping standard relativiste pour un paramètre de stochasticité $K = 1.3$ et un paramètre relativiste $\beta = 10\pi$.

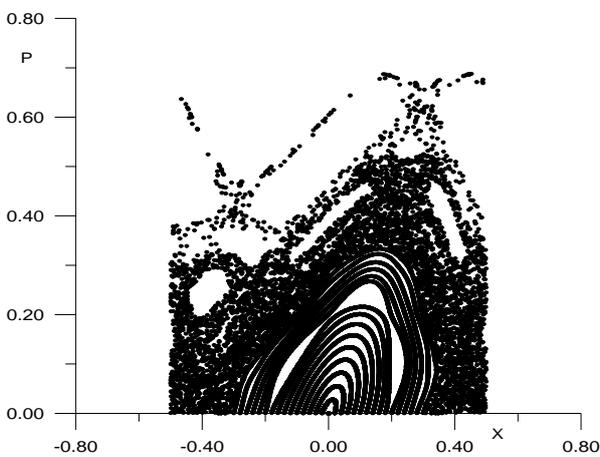


Figure 3 : Orbits des particules dans le mapping standard relativiste pour un paramètre de stochasticité $K = 1.3$ et un paramètre relativiste $\beta = 0.2\pi$.

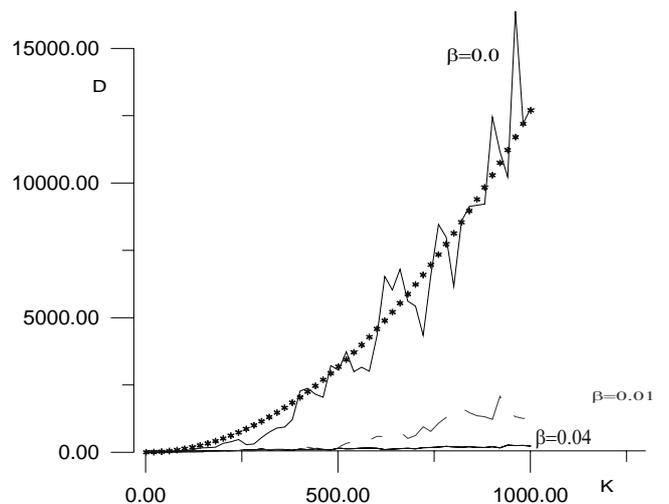


Figure 6 : Diffusion des particules dans le mapping standard relativiste pour un paramètre de stochasticité $K = 1.3$ et quatre valeur de β . Pour $\beta=0.00$, on a la limite vers le mapping classique et dans ce cas la diffusion suit l'évolution de la diffusion quasilineaire ($D_q \sim K^2$).

5. TRANSITION A LA STOCHASTICITE GLOBALE

Dans cette partie de notre étude, nous présentons une méthode qui nous permettra de déterminer les trajectoires stochastiques et piégées. Or, nous savons que si la valeur de K augmente en s'approchant de la valeur critique K_c dite limite de Chirikov [2], les surfaces de KAM sont détruites à cause de la stochasticité. Les régions dites "thin regions", près des surfaces séparatrices, sont alors les premières à devenir stochastiques. Nous constatons que lorsque la particule baigne dans un paquet d'ondes ultra-relativistes, les trajectoires de KAM demeurent régulières même si l'on se rapprochait de la limite de Chirikov. Nous dirons ainsi que l'effet ultrarelativiste élimine la stochasticité ou à la rigueur la limite. Or, si la valeur de K continue à augmenter, les surfaces régulières sont progressivement détruites et la stochasticité globale est alors atteinte. La transition de la stochasticité partielle à la stochasticité globale prend naissance lorsque la dernière courbe de KAM se détruit [2,5].

Nous proposons une méthode pour la détection du seuil de la destruction des courbes, en employant une technique d'analyse informatique qui consiste à suivre la trajectoire point par point lors de son mouvement sous l'effet d'un paquet d'ondes électromagnétiques. Si pour un point donné $A(X_a, P_a)$ de la trajectoire R , nous localisons un autre point $B(X_b, P_b)$ sur la même trajectoire R , le point B quitte cette trajectoire R et reste dans un voisinage $X(A,c)$ centré en A et de rayon c .

Si le module de AB est nul quand P_a tend vers P_b , nous dirons dans ce cas que la trajectoire est piégée, répondant à la condition de piégeage :

$$\lim_{r \rightarrow 0} |AB| = 0 \quad (12)$$

Si toutes les trajectoires satisfont la relation (12), la stochasticité est alors globale. Lors de nos investigations, nous avons calculé, pour chaque paire de points de même courbe, les différences $r = P_a - P_b$ et $X_a - X_b$. La condition (12) est testée pour un nombre N de particules obtenu après n_e itérations. Le calcul a été fait sur un HP9000 et pour $N=100$ et $n_e= 5000$. Plus N est grand et plus la précision est meilleure.

Par ailleurs, le phénomène de diffusion a lieu lorsque les trajectoires des particules sont en majorité stochastiques. Pour le mapping standard, cette condition est satisfaite pour $K > K_c$. Par contre, en ce concerne le mapping standard relativiste, les particules ne sont pas en majorité stochastiques même pour des valeurs de K supérieures à la limite classique de Chirikov. Par conséquent, ceci nous amène à distinguer entre la limite classique dite de Chirikov qui définit le seuil au delà duquel les trajectoires sont en majorité stochastiques. En appliquant ce résultat au mapping standard, nous avons retrouvé la constante de

Chirikov K_c à partir de la courbe représentée par la figure.7.

Pour étudier la transition, nous considérons un nombre de particules égal à 100. La trajectoire est piégée si le pourcentage des lignes stochastiques est inférieur à 100 et elle est stochastique pour un pourcentage des lignes égal à 100.

Il est démontré que dans le mapping standard, la vitesse de la lumière a pour effet de limiter la teneur d'avance dans l'espace de phase et elle introduit des surfaces de KAM persistant dans les régions où la quantité de mouvement de lumière est importante. Or, cet effet relativiste est dû à l'équation de l'accélération de Lorentz qui tient compte de la vitesse de la lumière en introduisant un paramètre supplémentaire ($\beta = \omega / \kappa c$). C'est ce paramètre qui contrôle la force de non linéarité dans la phase (progression dans l'équation du mapping). Cette non linéarité de la progression de la phase dans le régime relativiste, induit que le grand temps dynamique est fondamentalement différent de celui du mapping standard classique ou Newtonien.

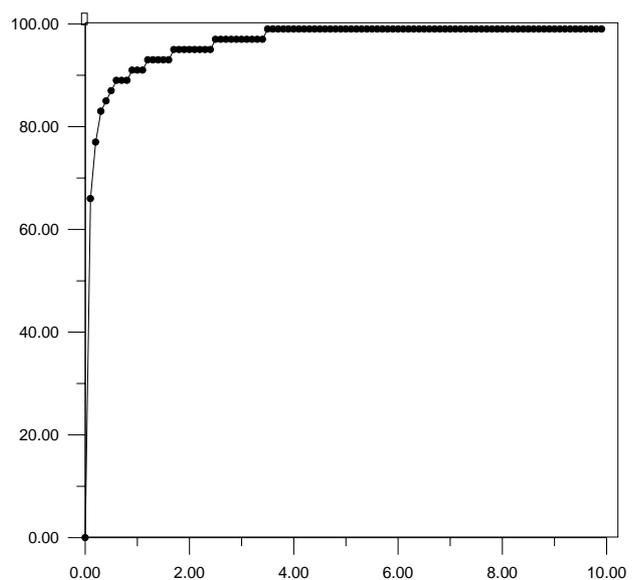


Figure 7 : Nous représentons le pourcentage des particules piégées et stochastiques en fonction de paramètre de stochasticité K .

Nous décrivons ensuite les propriétés fondamentales du mapping standard relativiste à deux paramètres (K, β) et nous illustrons les caractéristiques de mouvement des particules sous forme de trajectoires dans l'espace de phase.

Afin de détecter les traits caractéristiques de la dynamique déterminée par le (MSR), nous avons analysé les résultats numériques observés du mouvement des particules dans l'espace de phase. Par ailleurs, depuis qu'il a été démontré que la mapping standard classique ($\beta = 0$) met en relief la stochasticité globale au delà de la limite de Chirikov $K = K_c = 0.97$, nous choisissons $K = 1.3$ comme valeur de ce

paramètre.

Sur les figures 1, 2 et 3, nous montrons, pour 1000 itérations, des orbites de 50 particules qui sont initialement uniformément distribuées sur l'intervalle $-0.5 < X < 0.5$, avec $P = 0$. Nous constatons une diminution de la diffusion au fur et à mesure que β augmente. Nous dirons alors que l'effet relativiste supprime radicalement la diffusion pour des valeurs importantes de β et ceci a été vérifié sur la figure 6. Le procédé consiste à calculer la diffusion en fonction de k pour quatre valeurs de β . En effet, et comme nous pouvons l'observer sur les figures 4 et 5, dès que la valeur de β dépasse l'unité, l'effet relativiste est prédominant et le mapping standard définit diverses particules dynamiques d'une manière qualitative. Pour une valeur large de β (effet ultrarelativiste), il y a expansion de la plus haute surface de KAM dans la région correspondant aux grandes valeurs de P . De même, nous constatons une prédominance des îlots structurés et cohérents dans le voisinage de cette région. Il est particulièrement délicat de compter les îlots de 20 périodes, et encore d'avantage en ce qui concerne ceux correspondant aux 50 périodes de la figure (5). Afin de mettre en évidence la stochasticité, nous avons représenté la figure 7 qui montre la variation de nombre de particules en fonction de K . Nous constatons que l'état des particules se concrétise par le biais de trois domaines : un état régulier où il y a piégeage des particules pour des valeurs de $K < 1$, un deuxième état intermédiaire où les particules se trouvent en stochasticité partielle, et enfin un troisième état où nous observons un état de stochasticité globale pour des valeurs de K légèrement supérieures.

CONCLUSION

Nous avons étudié la dynamique non linéaire des particules accélérées à l'aide du mapping standard relativiste et nous avons montré que les effets relativistes annulent le mouvement stochastique des particules. Nous avons établi ainsi qu'en dynamique relativiste il n'y a pas de diffusion globale. Aussi, quand le mouvement relativiste est chaotique, il est entouré par le mouvement régulier. En retournant de nouveau au régime super relativiste, nous avons constaté l'opportunité de l'interchangeabilité de la stabilité des orbites périodiques autour des points fixes à l'origine avec les variations relativistes du paramètre d'avance de phase β . Le caractère de l'interaction entre les particules et le paquet d'ondes du champ électrique diffère

qualitativement de la dynamique des particules non relativistes.

S'agissant du cas non résonant, où les vitesses de phase des ondes dans le paquet diffèrent significativement de la vitesse de la lumière, l'énergie de la particule accélérera une limite. Cette situation est assez différente si la vitesse de phase d'une des ondes est limitrophe de la vitesse de la lumière. Dans ce cas, la voie pour une accélération illimitée de particule est stochastique est ouverte et il y a une analogie avec le cas de l'interaction des particules relativistes avec des ondes électromagnétiques se propageant à travers un champ magnétique donné.

Dans l'étude de la diffusion des particules, nous avons effectué une étude numérique pour mettre en évidence comment l'effet relativiste supprime la stochasticité des particules. Nous avons obtenu d'intéressants résultats que nous avons représentés sur la figure 6 et qui sont en bon accord avec ceux présentés dans la littérature [4].

Il a été remarquable de constater que β ne contient ni la charge e , ni le champ E_0 , ni même la masse au repos de la particule.

Or ces quantités jouent un rôle fondamental dans le caractère plus au moins relativiste du mouvement. En fait β ne dépend que des fréquences spatiale et temporelle du champ.

Quel serait alors le paramètre décrivant le caractère relativiste du mouvement ? Pour répondre à cette question, il est nécessaire de calculer la quantité eE_0/mkC^2 . Il est bien entendu que ce paramètre de relativité peut être déduit de K et $\beta/2\pi$ et correspond en fait à $K(\beta/2\pi)^2$. Nous pouvons donc remarquer que lorsque K est faible, l'effet relativiste ne se manifeste que pour de très grandes valeurs de β . Par contre, lorsque K est très grand, le seuil β indiquant l'influence du caractère relativiste du mouvement, est considérablement réduit. Ceci correspond à la disparition ou à l'affaiblissement de chaos pour des valeurs importantes de K et des valeurs de β inférieures à l'unité. Le caractère stabilisateur, lié à la relativité, peut être éventuellement confirmé.

Enfin, le traitement numérique par la méthode Splitting du problème lié au mouvement dans le champ statique E_0 sur kx , suppose $\omega_0 T$ petit; T est le pas de temps et ω_0 est la fréquence d'oscillations. Ceci équivaut aux valeurs faibles de K , et nous pouvons écrire $\beta \rightarrow \infty$ si $T \rightarrow 0$. Cela indique qu'un chaos numérique peut résulter de l'utilisation de temps grands, mais le problème n'est cependant pas pour autant relativiste.

N°1,pp.79-103, 1991) printed in Great Britain

BIBLIOGRAPHIES

1. **A.J. Lichtemberg** and **M.A. Libermann**, Regular and stochastic motion (Springler, New york, 1983)
2. **B.C. Chircov**, phys.rep.52, 265(1979)
3. **A.A. Chernicov**, **T. Tel**, **G. Vattay**, and **G.M. Zaslavesky**, Phys. Rev A40, 4072(1989)
4. **Y. Nomura**, **I.H. Ichikawa**, and **W. Horton**, Phys.Rev A45, 1103(1992)
5. **J.T. Mendonça**, Phys.fluids B3(1), 87(1991)
6. **B.V. Chircov**, Chaos, solutions and fractals Vol.1
7. **A.A. Rechester**, **M.N. Rosenbult** and **R.B. While**, phys. Rev A Vol.23.N°5,2664(1981)
8. Abarbanel, H.D.I. (1981). Physica 4D, 89.
9. **F.L. Hinton.**, **R.D. Hazeltine** (1976), Rev. Mod. Phys. 48.239.
10. **K.C. Schaing** (1988a), Phys, Fluids.31,8.
11. **Raouak**. Contribution à l'étude du transport anormal, Thèse du 3ème cycle (1995).