Nature & Technology

Effet de l'amplitude des interactions de portée nulle dans un condensat de Bose Einstein à température nulle

Hanane MOUSSA, Salem KESSAL

Laboratoire de Sciences Nucléaires et Interaction Rayonnement-Matière, Faculté de Physique, USTHB, Bab Ezzouar Alger

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Gross Pitaevskii pour un condensât confiné dans un piège harmonique à deux dimensions. Nous faisons varier le paramètre qui mesure l'intensité des interactions et nous en étudions l'effet sur la fonction d'onde et sur le potentiel chimique du condensât.

Mots clés : Bose Einstein, condensation, Gross Pitaevskii.

1. Introduction

La condensation de Bose Einstein de gaz atomiques (condensation d'un nombre macroscopique d'atomes dans le niveau d'énergie fondamental) a été prévue théoriquement par Einstein en 1925[1]. Du fait de difficultés techniques pour atteindre les très basses températures nécessaires, elle n'a été réalisée expérimentalement qu'en 1995[2]. Son importance a été reconnue rapidement par la communauté scientifique car elle a été couronnée par le prix Nobel de physique en 2001 . Cette réalisation a entraîné une grande quantité de travaux théoriques et expérimentaux dans le but de comprendre le comportement des condensats et de prévoir leurs propriétés [3,4,5,6,7,8].

Dans l'approximation du champ moyen, à température nulle et en présence d'interactions à très courte portée, l'état du condensât est décrit par une fonction d'onde qui satisfait à l'équation de Gross Pitaevskii[9,10]. Cette équation est une équation de Schrödinger contenant un terme non linéaire, terme qui complique sensiblement la résolution.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Gross Pitaevskii pour un condensât confiné dans un piège harmonique à deux dimensions, le cas du condensat à trois dimensions ayant été déjà traité[11] . Nous faisons varier le paramètre qui mesure l'intensité des interactions et nous en étudions l'effet sur la fonction d'onde et sur le potentiel chimique du condensât.

2. Equation de Gross Pitaevskii

Considérons des bosons en interactions mutuelles confinés dans un potentiel harmonique à deux dimensions; leur état est défini par la fonction d'onde φ qui satisfait à l'équation de Gross- Pitaevskii, qui s'écrit sous la forme:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y)+\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(x^2+y^2\right)\varphi(x,y)+\mathrm{N}g\left|\varphi(x,y)\right|^2\varphi(x,y)=\mu\varphi(x,y) \qquad (1)$$

où $\varphi(x,y)$ est la fonction d'onde à une particule, Δ le Laplacien, N le nombre de particules $(N \succ\succ 1)$, μ le potentiel chimique et ω_0 la pulsation du potentiel harmonique.

La constante g est définie par la relation :

$$V(\vec{r})=g\delta(\vec{r})$$

Où $V(\vec{r})$ est le potentiel d'interaction entre bosons qui est ainsi choisi de portée nulle. La fonction d'onde satisfait à la contrainte de normalisation :

$$\int \left|\varphi(x,y)\right|^2 dxdy = 1$$

En raison de la présence du terme non linéaire, l'équation de Gross Pitaevskii ne peut être intégrée analytiquement, du moins de manière précise. Nous sommes amenés à chercher des solutions numériques. Dans une première étape, on peut simplifier le problème en ne recherchant que les états à symétrie sphérique. Il semble naturel qu'au moins l'état de plus basse énergie possède cette symétrie sphérique. Nous nous intéresserons à la solution à symétrie sphérique (qui minimise l'énergie du condensât) de l'équation de Gross Pitaevskii, qui se ramène à l'équation aux dérivées partielles suivante pour la partie radiale:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{2}m\omega_0\rho^2+Ng\left|\varphi(\rho)\right|^2\right]\varphi(\rho)=\mu\varphi(\rho) \qquad (2)$$

Pour des raisons pratiques, nous effectuons le changement de variables : $\eta = \rho/\sigma$, $E = \mu/\hbar\omega_0$, $A = \dfrac{2Ng}{\hbar\omega_0}$, σ est telle que : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_0}}$. Ceci qui nous permet d'écrire cette équation sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\varphi'' + \frac{1}{\eta}\varphi' + \left(2E - \eta^2\right)\varphi - \mathrm{A}\varphi^3 = 0 \qquad (3)$$

Avec une contrainte de normalisation :

$$2\pi\int_0^\infty \eta\varphi^2(\eta)d\eta = 1 \qquad (4)$$

3. Résultats numériques :

Nous avons intégré numériquement l'équation (3) en utilisant la méthode de Runge Kutta d'ordre 4[12]. La résolution avec cette méthode nécessite un changement qui transforme l'équation du second ordre en deux équations différentielles du 1er ordre couplées. Nous avons utilisé un algorithme qui commence à l'origine par un $\eta_0 = 10^{-5}$ et un pas $h = 10^{-4}$, le paramètre E est ajusté pour vérifier la condition $\varphi(\infty) = 0$ et les conditions aux limites sont :

$$\varphi(0) = 1 \quad , \quad \varphi'(0) = 0$$

En l'absence d'interactions $(\mathrm{A} = 0)$, la solution est gaussienne. Cela est bien naturel, puisqu'on s'est ramené au problème de bosons dans un oscillateur harmonique à 2D ; toutes les particules sont dans l'état fondamental, la fonction d'onde est gaussienne.

En présence d'interactions, nous avons résolu l'EGP (3) pour différentes valeurs du paramètre d'interaction. Nous avons constaté que (voir figure 1) :

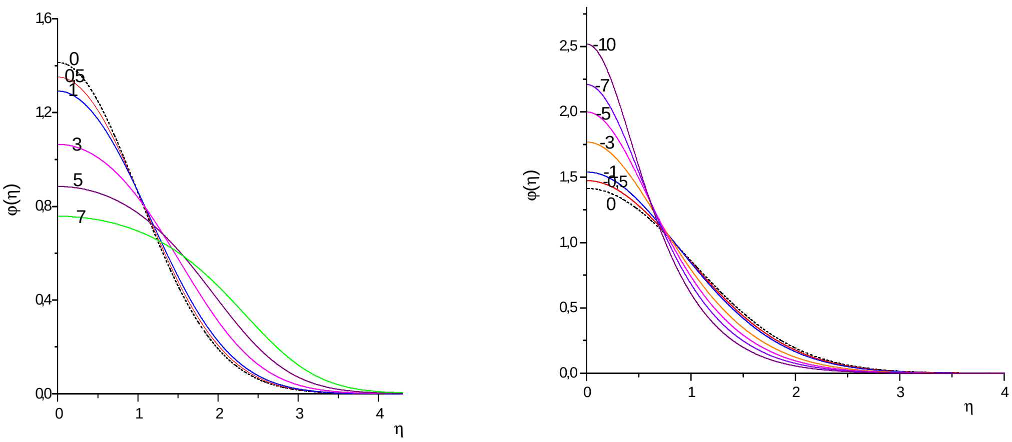

Fig 1 : variation de la fonction d'onde radiale normalisée d'un condensât dans un piège harmonique à deux dimensions en interaction répulsives (à gauche) et attractives (à droite). Les valeurs de A sont indiquées sur les courbes correspondantes.

- Lorsque $A > 0$ (interactions répulsives), la fonction d'onde φ caractérisant les bosons condensés dans un piège à 2D a une allure gaussienne ; elle s'élargit progressivement quand A croit. Nous avons constaté que cette fonction d'onde est stable jusqu'à $A = 7$. Au-delà de cette valeur, la fonction d'onde tend vers l'infini (instabilité).
- Lorsque $A < 0$ (interactions attractives), la fonction d'onde φ est toujours d'allure gaussienne et se rétrécit lorsque le module de A augmente. On constate qu'un condensât de B-E attractif est toujours stable, quelle que soit la valeur de A.

Lors de la résolution numérique de l'équation (3) nous ajustons chaque fois le paramètre E pour vérifier la condition $\varphi(\infty) = 0$: nous faisons varier sa valeur de façon à satisfaire cette condition. Nous constatons que le potentiel chimique réduit E du condensât augmente régulièrement avec l'intensité des interactions. Les résultats sont représentés par la figure 2.

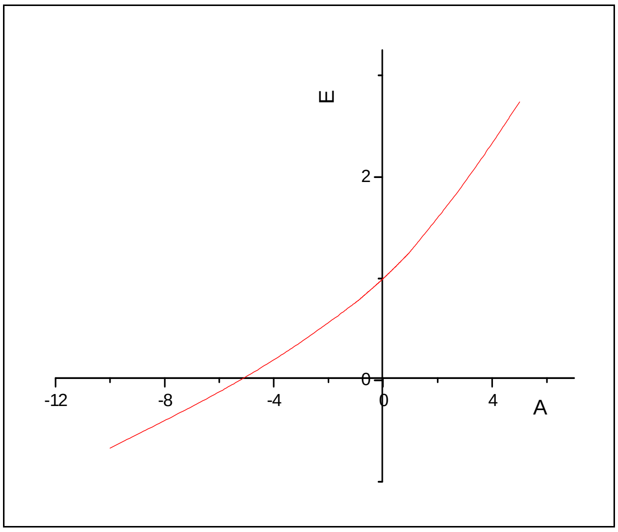

Fig 2 : potentiel chimique réduit E du condensât dans un piège harmonique 2D en fonction du paramètre d'interaction A.

On utilise ensuite les solutions numériques directement obtenues à partir de l'équation (3) pour déterminer le rapport R de l'énergie d'interaction du condensât à son énergie cinétique :

$$R = \frac{|E_{\text{int}}|}{E_{cin}} = \frac{A}{2} \frac{\int |\varphi(\eta)|^4 d\eta}{\int \frac{d^2\varphi(\eta)}{d\eta^2} d\eta} \qquad (9)$$

En faisant varier le paramètre A, nous constatons que ce rapport tend vers l'infini pour des interactions très intenses. L'énergie cinétique du condensât est alors négligeable. Dans ce cas, l'approximation de Thomas Fermi est valable. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

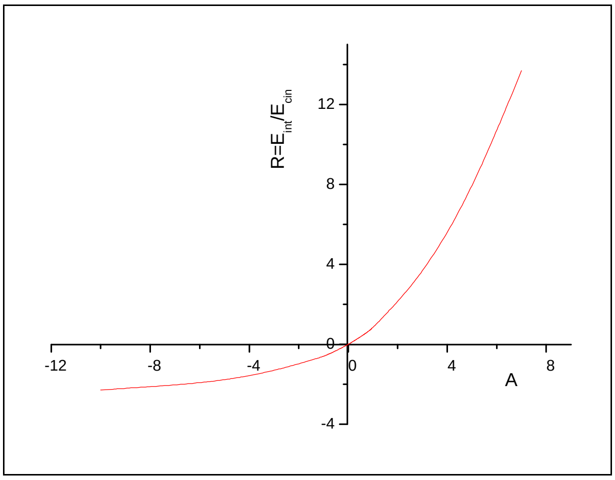

Fig.3 : Rapport de l'énergie d'interaction sur l'énergie cinétique en fonction A. On constate que, pour des interactions très intenses, ce rapport tend vers ∞ .

4. Conclusion

Nous avons considéré un condensât de N bosons en interaction dans un piège harmonique à deux dimensions. Son état est décrit par une fonction d'onde qui satisfait à l'équation de Gross Pitaevskii. Nous avons résolu cette équation numériquement. Nous avons constaté que la fonction d'onde, d'allure gaussienne, s'élargit progressivement pour des interactions plus intenses quand les interactions sont répulsives et elle se rétrécit si les interactions sont attractives. De plus nous avons déterminé le potentiel chimique du condensât et le rapport de l'énergie d'interaction du condensât à son énergie cinétique. Ce rapport tend vers l'infini pour des interactions très intenses. On peut alors négliger l'énergie cinétique du condensât : l'approximation de Thomas Fermi est applicable.

Nos calculs ont été effectués en fonction du paramètre A qui contient l'intensité de l'interaction et le nombre de particules. Des calculs supplémentaires sont nécessaires pour séparer l'effet l'interaction de celui du nombre de particules.

5. Bibliographie

[1] A. Einstein. Quantentheorie des cinatomigen idealen Gases. Zweite Abhun-lung. Sitzungberg. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 3, (1925).

[2] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle Phys Rev Lett 75, 3969 (1995)
[3] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell Phys Rev Lett 77, 4984 (1996)
[4] F.Dalfovo, S.Giogini, L.P.Pitaevskii and S.Stringari, Rev Mod Phys 71,463 (1999)
[5] A.J.Legget Rev Mod Phys 73, 307 (2001)
[6] L.P.Pitaevskii, S.Stringari, Bose Einstein Condensation Clarendon Press, Oxford, 2003
[7] K.W.Mahmud, J.N.Kutz and W.P.Reinhart Phys Rev A 66, 063607 (2002)
[8] A.D.Jackson, G.M.Kavoulakis and E.Lundh Phys Rev A72, 053617 (2005)
[9] W.D. Li Phys Rev A 74, 063612 (2006)
[10] E . P. Gross, Nuovo Cimento 20, 454(1961)
[11] L . P. Pitaevskii, Zh . Eksp. Teor . Fiz .40, 646 (1961) (Sov. Phys. JETP 13, 451 (1961)
[12] S.K.Adhikari, Phys Rev A71, 053603 (2005)
[13] [www]: http/www.myphysicslab.com/runge.kutta.html