ETUDE NON STANDARD
DE LA GÉOMÉTRIE LOCALE DES CUBIQUES

Reçu le 13/12/1999– Accepté le 11/11/2000

Résumé

L'objet de cet article est l'étude du comportement local d'une cubique dans le halo d'un point régulier ou singulier. Pour cela, on utilisera le fait que tout point limité de IR^2 admet un développement fini (décomposition de Goze).

Ceci nous permettra d'étudier la géométrie tangentielle en ce point et le comportement analytique de la cubique autour de ce même point en donnant un paramétrage dans une direction tangentielle.

Cette approche est faite dans le cadre des ensembles internes (Analyse Non Standard).

Mots clés: *Cubiques, décomposition de Goze, courbure, points singuliers, développement en ε-ombres , développement de Puiseux.*

Code AMS: 26 E 35, 14 H 05, 14 H 20.

Abstract

The aim of this article is the study of the local behaviour of a cubics in the halo of a regular or singular point. For this, we use the Goze decomposition of a limited point.

This allows us to study the tangential geometry at this point, the analytic behaviour of a cubic around this same point with an asymptotic development in each tangential direction .

This approach is done in the case of the internal set theory.

Key words: *Cubics, Goze decomposition, curvature, singular points, ε-shadow development, Puiseux development.*

M. HANNACHI
Laboratoire de Recherche
de Mathématiques (L.R.M.)
Faculté des sciences
Université Ferhat Abbas
Sétif, 19000, Algérie

ملخص

هدف هذا المقال هو دراسة السلوك المحلي في جوار نقطة نظامية أو شاذة، من أجل هذا نستعمل فكرة أن كل نقطة محدودة من IR^2 تملك نشرا محدودا (تفكيك قوز) هذا يسمح لنا بدراسة:
- الهندسة المماسية عند هذه النقطة.
- السلوك التحليلي للتكاعب حول نفس النقطة وهذا بإعطاء توسيط في اتجاه مماسي.

مفاتيح الكلمات: منحنى جبري من الدرجة الثالثة، تفكيك Goze ، تقوس، النقاط الشذة، نشر ε-ظل، نشر Puiseux.

Soit (C) une cubique standard dont l'équation, après changement de repère, s'écrit:

$$f(x,y) = a_0x^3 + a_1y^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + a_7x = 0$$

Soit $M \in hal(0)$, il existe une base standard orthonormée:

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

et deux infinitésimaux ε_1, ε_2 tels que :

$$M = \varepsilon_1 \vec{V}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_2$$

Si on suppose que M est un point de la cubique (C), l'équation $f(M) = 0$ donne par passage à l'ombre : $a_7 \alpha = 0$

1^er^ cas: $a_7 \neq 0$

L'origine est un point régulier, on a $\alpha = 0$, on peut choisir pour $\vec{V}_1$, tangent à l'origine à la cubique, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour compléter la base standard on se donne $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ce qui nous donne la décomposition infinitésimale suivante:

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1: *Si $a_7 \neq 0$, la courbure à l'origine est donnée par:*

$$K = 2^0 \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| = 2 \left| \frac{a_5}{a_7} \right|$$

Démonstration: En utilisant la décomposition de M, l'équation $f(M) = 0$ se réduit à:

$$a_0 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3 + a_1 \varepsilon_1^2 + a_2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + a_3 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + a_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + a_5 \varepsilon_1 + a_6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + a_7 \varepsilon_2 = 0 \quad (1)$$

En divisant par ε_1, on obtient:

$$a_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + a_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + a_4 \varepsilon_2^2 + a_5 + a_6 \varepsilon_2 + a_7 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0$$

Par passage à l'ombre, on a alors:

$$2\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = -\frac{a_5}{a_7} \quad \text{........cqfd.} \quad (2)$$

Proposition 2: *Si $a_7 \neq 0$, la cubique* (C) *admet la paramétrisation suivante:*

$$x = x(t) = -\frac{a_5}{a_7} t^2 + \left(-\frac{a_1}{a_7} + \frac{a_5 a_6}{a_7^2} \right) t^3 + \ldots.$$
$$y = y(t) = t$$

Démonstration: (2) peut s'écrire comme suit:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left(-\frac{a_5}{a_7} + \varepsilon' \right), \quad \varepsilon' \cong 0$$

En reportant cette valeur de ε_2 dans l'équation (1), on a:

$$a_0 \varepsilon_1^4 \left(-\frac{a_5}{a_7} + \varepsilon' \right)^3 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_1^3 \left(-\frac{a_5}{a_7} + \varepsilon' \right)^2 + a_3 \varepsilon_1^2 \left(-\frac{a_5}{a_7} + \varepsilon' \right) + a_4 \varepsilon_1^2 \left(-\frac{a_5}{a_7} + \varepsilon' \right)^2 + a_6 \varepsilon_1 \left(-\frac{a_5}{a_7} + \varepsilon' \right) + a_7 \varepsilon' = 0$$

En divisant par ε_1 et par passage à l'ombre , on a donc:

$$0\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_1}\right) = -\frac{a_1}{a_7} + \frac{a_5 . a_6}{a_7^2}$$

Le point M va s'écrire comme suit:

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_5}{a_7} \varepsilon_1^2 + \left(-\frac{a_1}{a_7} + \frac{a_5 a_6}{a_7^2} \right) \varepsilon_1^3 + \varepsilon'' \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne par itération de ce procédé typiquement non standard et par permanence un paramétrage de la courbe (C).

<u>Remarque</u>: on retrouve ici le développement de Puiseux et ses paires caractéristiques.

<u>2ème cas</u>: $a_7 = 0$

L'origine est un point singulier, la cubique (C) est singulière. L'équation $f(M) = 0$ donne par passage à l'ombre:

$$a_4 \alpha^2 + a_6 \alpha \beta + a_5 \beta^2 = 0$$

Le résultat va dépendre du discriminant: $\Delta = a_6^2 - 4 a_4 a_5$.

i) $\mathbf{\Delta < 0}$: Le cône des tangentes à l'origine est vide, l'origine est un point isolé de la cubique.

ii) $\mathbf{\Delta = 0}$: On a un unique vecteur dans le cône des tangentes, on a alors ainsi les cubiques à point double appelées communément cubiques nodales.

Proposition 3: *Si $\Delta = 0$, la courbe (C) est une cubique singulière, elle admet alors une paramétrisation rationnelle et l'origine est un point de rebroussement de première espèce, caractérisé par la courbure généralisée suivante:*

$$K_g = \frac{3}{2}\,{}^{0}\left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\frac{3}{2}-1}} \right| = \frac{3}{2} \sqrt{\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right|}$$

Démonstration: Si $\Delta = 0$, après changement de repère, l'équation de la cubique peut s'écrire comme suit:

$$f(x, y) = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 y^3 + \alpha_2 x^2 y + \alpha_3 x y^2 + \alpha_4 x^2 = 0$$

avec α_1, α_4 non nuls, sinon la cubique serait dégénérée.

On obtient comme précédemment:

$$M = \varepsilon_1 \vec{V}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

L'équation $f(M) = 0$ se réduit à:

$$f(M) = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + \alpha_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \alpha_4 \varepsilon_2^2 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{\alpha_4 \varepsilon_2^2}{\alpha_0 \varepsilon_2^3 + \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3 \varepsilon_2}$$

Les coordonnées du point s'écrivent alors comme suit:

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_4 \varepsilon_2^3}{\alpha_0 \varepsilon_2^3 + \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3 \varepsilon_2} \\ -\dfrac{\alpha_4 \varepsilon_2^2}{\alpha_0 \varepsilon_2^3 + \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3 \varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

Par permanence, on obtient une paramétrisation rationnelle de la cubique:

$$x = x(t) = -\frac{\alpha_4 t^3}{\alpha_0 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_1};$$

$$y = y(t) = -\frac{\alpha_4 t^2}{\alpha_0 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_1}.$$

Ainsi, l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

En reprenant l'équation (3), et en divisant par ε_1, on a:

$$\alpha_0\varepsilon_2^3+\alpha_1+\alpha_2\varepsilon_2^2+\alpha_3\varepsilon_2+\alpha_4\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}=0$$

Le passage à l'ombre donne:

$${}^0\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}\right)=-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\Rightarrow {}^0\left|\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\frac{3}{2}-1}}\right|=\sqrt{\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right|}$$

ce qui donne aisément la courbure généralisée donnée dans la proposition.

iii) $\Delta > 0$

<u>Proposition 4</u>: *Si $a_7=0$ et $\Delta>0$, la cubique admet deux branches tangentes à l'origine régulières, rationnelles.*

<u>Démonstration</u>: Le cône des tangentes à l'origine contient deux vecteurs, après changement de repère, l'équation de la cubique peut s 'écrire comme suit:

$$f(x,y)=\beta_0x^3+\beta_1y^3+\beta_2x^2y+\beta_3xy^2+\beta_4x^2+\beta_5xy=0$$

Soit $M\in hal(0)$, avec $M=\varepsilon_1\vec{V}_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\vec{V}_2$, on obtient:

$${}^0f(M)=\beta_4\alpha^2+\beta_5\alpha\beta=0$$

On a ainsi les vecteurs tangents à l'origine suivants:

$$\vec{V}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{V'}_1=\frac{1}{\sqrt{\beta_4^2+\beta_5^2}}\begin{pmatrix}\beta_5\\-\beta_4\end{pmatrix}$$

et par commodité on va restreindre l'étude à la direction tangentielle verticale.

Dans cette direction, on a $M=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1\end{pmatrix}$.

De l'équation $f(M)=0$, on déduit:

$$f(M)=\beta_0\varepsilon_1\varepsilon_2^3+\beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_2^2+\beta_3\varepsilon_1\varepsilon_2+\beta_4\varepsilon_2^2+\beta_5\varepsilon_2=0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow\ \beta_0\varepsilon_2^3+\beta_1+\beta_2\varepsilon_2^2+\beta_3\varepsilon_2+\beta_4\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}+\beta_5\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=0$$

Par passage à l'ombre, on obtient: ${}^0\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)=-\frac{\beta_1}{\beta_5}$

Ce qui nous permet de conclure que la première branche de la cubique est régulière et sa courbure à l'origine est égale à: ${}^0\left|\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right|=2\left|\frac{\beta_1}{\beta_5}\right|$.

De l'équation (4), on a:

$$\varepsilon_1=-\frac{\beta_4\varepsilon_2^2+\beta_5\varepsilon_2}{\beta_0\varepsilon_2^3+\beta_2\varepsilon_2^2+\beta_3\varepsilon_2+\beta_1}$$

On a donc les coordonnées de M:

$$M=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta_4\varepsilon_2^3+\beta_5\varepsilon_2^2}{\beta_0\varepsilon_2^3+\beta_2\varepsilon_2^2+\beta_3\varepsilon_2+\beta_1}\\[2ex] -\dfrac{\beta_4\varepsilon_2^2+\beta_5\varepsilon_2}{\beta_0\varepsilon_2^3+\beta_2\varepsilon_2^2+\beta_3\varepsilon_2+\beta_1}\end{pmatrix}$$

Ce qui donne en utilisant le principe de Cauchy, une paramétrisation rationnelle de la première branche de la cubique:

$$M=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta_4t^3+\beta_5t^2}{\beta_0t^3+\beta_2t^2+\beta_3t+\beta_1}\\[2ex] -\dfrac{\beta_4t^2+\beta_5t}{\beta_0t^3+\beta_2t^2+\beta_3t+\beta_1}\end{pmatrix}$$

En utilisant la même technique non standard, on peut voir aisément que la deuxième branche est aussi régulière, admettant une paramétrisation rationnelle; ce qui nous permet de dire qu'on a un éclatement de la singularité, la singularité à l'origine est seulement apparente.

REFERENCES

[1]- Diener M. et Lobry, éditeurs, "Analyse non standard et représentations du réel", Editions du CNRS (Paris) - OPU (Alger), (1985).

[2]- Diener F. et Reeb G., "Cours d'analyse non standard", Hermann, Paris, (1989).

[3]- Dieudonné J. , *Calcul infinitésimal,* Hermann, Paris, (1968).

[4]- Goze M., "Etude locale des courbes algébriques", thèse, IRMA, Strasbourg, (1982).

[5]- Goze M. and Lutz R., "Non standard analysis: A practical guide with applications", Lecture Notes in Maths., Springer-Verlag, 88, (1981) .

[6]- Hannachi M., "Invariants métriques associés aux points singuliers d'une courbe réelle", I.R.M.A., Strasbourg, (1985).

[7]- Hannachi M., "Invariants métriques associés à une courbe réelle", *Maghreb Mathematical Review*, Vol. 1, N°2, (1992), pp. 161-166.

[8]- Hannachi M., "Invariants métriques associés à une courbe réelle dans IR^n", *Maghreb Mathematical Review*, Vol. 3, N°1, (1994), pp. 65-68.

[9]- Hannachi M., "Invariants métriques associés aux points singuliers, à distance finie ou infinie, d'une courbe réelle", Thèse de doctorat, Sétif, (1996).

[10]- Hannachi M. et Mezaghcha K., "Formules généralisées du repère mobile", *Maghreb Mathematical Review*, Vol. 3, N°2, décembre (1994).

[11]- Mezaghcha K., "Etude en un point quelconque d'une courbe réelle et une généralisation des formules du repère mobile", magister, UFAS, décembre (1994).

[12]- Nelson E., "Internal set theory", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83, (1977), pp. 1165-1198.