

## GENERATION DE MAILLAGES ORTHOGONAUX POUR LA SIMULATION DES ECOULEMENTS DANS DES GEOMETRIES COMPLEXES

### Résumé

La résolution d'un système d'équations différentielles décrivant un écoulement dans une géométrie complexe peut être largement simplifiée par un maillage bien construit. L'un des problèmes centraux dans la prédiction de ces écoulements est donc la génération des grilles. Dans cette étude, une méthode de générations de maillages a été développée en se basant sur la résolution simultanée de deux équations aux dérivées partielles du type Poisson qui donnent les coordonnées curvilignes en fonction des coordonnées cartésiennes.

**Mots clés:** *Maillage, orthogonal, curviligne, génération, inversion.*

### Abstract

The solution of systems of differential equations describing the flow inside a complex geometry can be largely simplified by use of a well constructed mesh. One of the central problems in the prediction of such flows is therefore grid generation. In this study, a method of grid generation was developed based on the simultaneous solution of two Poisson-type partial differential equations which give curvilinear coordinates as a function of cartesian coordinates.

**Key words:** *Mesh, orthogonal, curvilinear, generation, inversion.*

**S. BENISSAAD**

**M. KADJA**

Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Génie Mécanique  
Université Mentouri  
Constantine (Algérie)

### ملخص

إن طريقة الحل الحسابي لمعادلات السيالان في الأشكال الهندسية المعقدة أو حول الأجسام ذات أشكال ما باستعمال الأحجام المتناهية، يتطلب إدخال الشروط الحدودية لهذه المعادلات. إذا استعملنا الإحداثيات الكرتيزية لحل هذه المشاكل يجب علينا أن نقوم بحساب نقوم بحساب على حدود الشكل المدروس، مما يؤدي إلى نقص في دقة الحل الحسابي المحصل عليه خصوصا على الحدود. إذا من المهم أن نستعمل الإحداثيات المنحنية التي تتبع نالشكل الهندسي المدروس لأن الأحجام المستعملة يكون لها وجه مطابق للحد النهائي. إن الهدف الرئيسي لهذا العمل هو إنجاز برنامج للحساب بالفرطروان لإنجاز الإحداثيات المنحنية المتعامدة ذات بعدين لأي شكل هندسي.

وقد تم إنجاز طريقة بسيطة للحصول على الإحداثيات المنحنية لشكل هندسي ما بحل مجموعة معادلات بواسون. بينما تعتبر هذه الطريقة مباشرة، دقيقة وليئة غير أنها كلفة حسابية عالية نوعا ما، خصوصا عندما تكون الأشكال الهندسية جد معقدة.

**الكلمات المفتاحية:** شبكة، متعامدة، منحنية، إنجاز، عكس المعادلات.

Le problème de génération de grilles est la détermination du type de la transformation qui prend les points de la grille depuis le domaine physique (D), au domaine de calcul (Dc) d'une façon unique (fig.1). Plusieurs conditions doivent être imposées à de telles transformations:

- 1/ La transformation doit être une à une.
- 2/ Les lignes de la grille doivent être fermement espacées dans (D) sinon des erreurs numériques non négligeables sont attendues.
- 3/ Les grilles extrêmement obliques doivent être évitées car il a été montré que celles-ci accentuent parfois les erreurs de troncature [1].

Les techniques de génération de grilles peuvent être classées dans trois catégories:

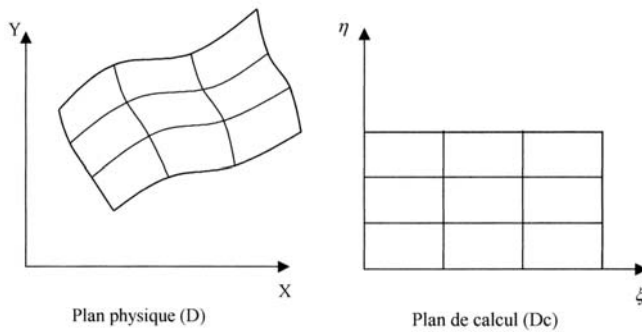
- 1/ Les méthodes de variables complexes.
- 2/ Les méthodes algébriques.
- 3/ Les techniques basées sur la résolution des équations différentielles.

Les techniques de variables complexes présentent l'avantage que les transformations employées sont analytiques ou partiellement analytiques à l'opposé des deux autres méthodes qui sont entièrement numériques. Cependant, les variables complexes sont restreintes à des formes simples à deux dimensions et sont inflexibles quand des géométries différentes nécessitent une prescription nouvelle des équations de transformation. Les techniques d'équations différentielles et algébriques peuvent cependant être employées sur des problèmes compliqués, même à trois dimensions.

### PROCEDURE DE GENERATION DE GRILLES PAR RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Parmi les méthodes existantes [2, 3], la procédure la plus employée est celle qui consiste à la résolution numérique des équations différentielles elliptiques qui transforment le domaine physique en un domaine rectangulaire, défini en termes de coordonnées transformées. Il existe deux alternatives dans cette méthode:

1/ La méthode directe qui résoud les équations différentielles pour les coordonnées curvilignes  $\xi$  et  $\eta$  sur des grilles sur des grilles cartésiennes  $X$ - $Y$  dans le plan physique (fig.1).



**Figure 1:** Plan physique et plan de calcul.

2/ La méthode inverse exigeant la résolution des équations différentielles pour les coordonnées  $X$  et  $Y$  sur grille rectangulaire  $\xi$ - $\eta$  dans le plan transformé.

L'une ou l'autre de ces deux méthodes peut donner naissance à des grilles orthogonales, des grilles non-orthogonales et des grilles conformes, dépendant de la nature précise des équations résolues et de la manière avec laquelle les limites sont traitées. Crowley [4] fut le premier à suggérer l'emploi d'un ensemble d'équations de Laplace pour  $\xi$  et  $\eta$  en fonction de  $X$  et  $Y$  pour générer les coordonnées curvilignes, soient:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} = 0 \quad (2)$$

Mais Godunov et Prokopov [5] introduisent l'idée de contrôler l'espacement des lignes de coordonnées en formant des équations du type Poisson :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} = J^2 P(X, Y) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} = J^2 Q(X, Y) \quad (4)$$

où  $J$  est le Jacobien de la transformation:

$$J = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (5)$$

Les fonctions  $P$  et  $Q$  sont choisies de façon à contrôler l'espacement des lignes selon la densité désirée.

Le système employé par Thompson et al [6] est de la forme:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} = P(X, Y) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} = Q(X, Y) \quad (7)$$

Avec les fonctions de contrôle  $P$  et  $Q$  dépendantes des deux coordonnées curvilignes, plutôt que des coordonnées cartésiennes comme proposées par Godunov et Prokopov.

Mobley et Stewart [7] ont utilisé pour la première fois les équations suivantes:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} = \frac{1}{h_\xi} f'' \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} = -\frac{1}{h_\eta} q'' \quad (9)$$

où 
$$h_\xi = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial X} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right]^2 \quad (10)$$

$$h_\eta = \left[ \frac{\partial \eta}{\partial X} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right]^2 \quad (11)$$

Les fonctions de contrôle  $f$  et  $q$  préservent l'orthogonalité et sont employées pour comprimer ou étendre les lignes de coordonnées comme désirées.

Dans la présente procédure les équations employées sont les inverses des équations (8) et (9) i.e.

$$h_{\eta\eta} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + h_{\xi\xi} \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} = h_{\eta\eta} \frac{\partial X}{\partial \xi} f'' + h_{\xi\xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} q'' \quad (12)$$

$$h_{\eta\eta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + h_{\xi\xi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = h_{\eta\eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} f'' + h_{\xi\xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} q'' \quad (13)$$

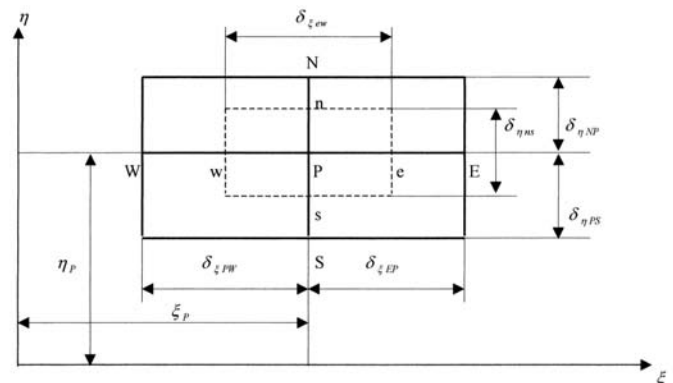
où : 
$$h_{\xi\xi} = \left[ \frac{\partial X}{\partial \xi} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right]^2 \quad (14)$$

$$h_{\eta\eta} = \left[ \frac{\partial X}{\partial \eta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right]^2 \quad (15)$$

Les conditions aux limites pour  $X$  et  $Y$  sont les suivantes:

$X = \text{Cte}$  et  $Y = \text{Cte}$  sur toutes les limites, soit:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0 \quad (16)$$



**Figure 2:** Schéma typique des nœuds de la grille et la notation associée.

Après discrétisation, si le point  $P$  (fig.2) correspond au nœud  $(i, j)$ , on peut écrire les équations (12) et (13) sous les formes algébriques suivantes:

$$A_{i,j} X_{i,j} = A_{i,j+1} X_{i,j+1} + A_{i,j-1} X_{i,j-1} + A_{i+1,j} X_{i+1,j} + A_{i-1,j} X_{i-1,j} - Sx_{i,j}$$

$$A_{i,j} Y_{i,j} = A_{i,j+1} Y_{i,j+1} + A_{i,j-1} Y_{i,j-1} + A_{i+1,j} Y_{i+1,j} + A_{i-1,j} Y_{i-1,j} - Sy_{i,j}$$

où

$$A_{i,j+1} = \frac{\delta_{\xi ew}}{\delta_{\eta NP}} h_{\xi\xi} \quad (a)$$

$$A_{i,j-1} = \frac{\delta_{\xi ew}}{\delta_{\eta PS}} \quad (b)$$

$$A_{i-1,j} = \frac{\delta_{\eta ns}}{\delta_{\xi EP}} h_{\eta} \quad (c)$$

$$A_{i+1,j} = \frac{\delta_{\eta ns}}{\delta_{\xi PW}} h_{\eta\eta} \quad (d)$$

$$A_{i,j} = A_{i,j+1} + A_{i,j-1} + A_{i+1,j} + A_{i-1,j} \quad (e)$$

et :

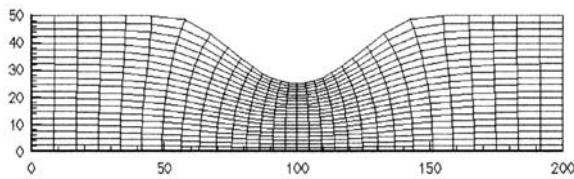
$$Sx_{i,j} = h_{\eta\eta} \delta_{\eta ns} \delta_{\xi ew} \frac{f''}{f'} \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{i,j} + h_{\xi\xi} \delta_{\eta ns} \delta_{\xi ew} \frac{q''}{q'} \frac{\partial X}{\partial \eta} \Big|_{i,j} \quad (20)$$

$$Sy_{i,j} = h_{\eta\eta} \delta_{\eta ns} \delta_{\xi ew} \frac{f''}{f'} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \Big|_{i,j} + h_{\xi\xi} \delta_{\eta ns} \delta_{\xi ew} \frac{q''}{q'} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \Big|_{i,j} \quad (21)$$

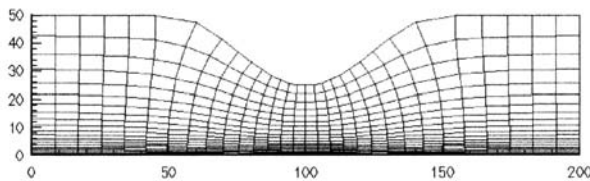
Les équations (17) et (18) sont résolues par une méthode itérative ligne par ligne.

## APPLICATIONS

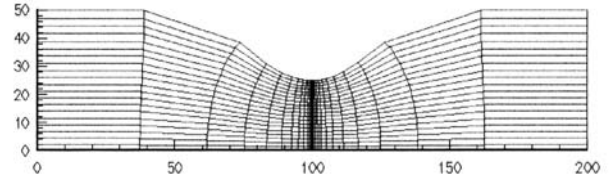
Le code de calcul développé a été appliqué à une constriction de conduit avec une distribution uniforme de  $\xi$  et  $\eta$  dans le plan transformé (fig.3) et avec contrôle de l'espacement des lignes de la grille dans les deux directions et en utilisant des fonctions de contrôle particulières à ce type de géométrie, ce qui mène à une distribution non uniforme des lignes  $\xi = Cte$  et  $\eta = Cte$  où  $f(\xi) = \xi, q(\eta) = \exp(-3\eta)$  dans le cas de la figure 4.,  $f(\xi) = \sinh^{-1} 10(\xi - 0.5), q(\eta) = \eta$  dans le cas de la figure, ou en utilisant une distribution non uniforme des lignes  $\xi = Cte$  et  $\eta = Cte$ ;  $\xi$  varie en progression géométrique de rapport 0.85 et  $\eta$  varie en progression géométrique de rapport 1.25 (fig.6).



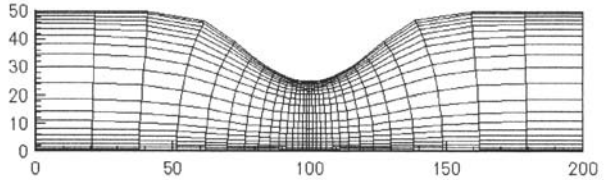
**Figure 3:** Grille obtenue pour le conduit convergent-divergent avec une maille  $\xi$ - $\eta$  de  $32 \times 21$  ( $f(\xi)=1; q(\eta)=1$ )



**Figure 4:** Grille obtenue pour le conduit convergent-divergent employant les fonctions :  $f(\xi)=\xi; q(\eta)=\exp(-3\eta)$  (compression dans la direction de  $\eta$  seulement).



**Figure 5:** Grille obtenue pour le conduit convergent-divergent employant les fonctions :  $f(\xi)=1/\sinh 10(\xi-0.5); q(\eta)=\eta$  (compression dans la direction de  $\xi$  seulement).



**Figure 6:** Grille obtenue pour le conduit convergent-divergent employant une distribution non uniforme pour  $\xi$  et  $\eta$ :  $\xi$  varie en progression géométrique de rapport 0.85 de 0 à 0.5 et de rapport  $1/0.85$  de 0.5 à 1;  $\eta$  varie en progression ;2iaue rppport 1.25 de 0 0 0.5 et de rapport  $1/1.25$  de0.

## CONCLUSION

Une méthode a été développée pour la construction de maillages bidimensionnels orthogonaux, grâce à la résolution itérative d'un système d'équations de Poisson pour les coordonnées physiques.

La procédure est flexible mais peut être coûteuse spécialement dans le cas où l'on exige les lignes à passer en des positions spécifiées de la paroi (par exemple, sur un P.C. 486 de 18Mhz et 8Mo de rames, dans le cas de la figure 5, il a fallu 1266 itérations correspondant à 28 heures d'exécution).

## REFERENCES

- [1]- Raithby, G. D (1976). " Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Flow". Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol.9, pp. 153-164.
- [2]- Thompson, J.F (1982). " Numerical Grid Generation ". Elsevier, Amsterdam.
- [3]- Thompson, J.F, Zahu, U.A.W and Mastin, C.W (1982). "Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review". Journal Computational Physics. Vol.47, pp.1-108.
- [4]- Crowley, W. P (1962). " An Equipotential Zone on a Quadrilateral Mesh, Memorandum". Lawrence Livermore National laboratory.
- [5]- Godunov, S.K and Prokopov, G.D (1972). "The Use of Moving Meshes in Gaz Dynamical Computations". USSR Compational Mathematical Physics, vol.12, 1972.
- [6]- Thompson, J.F, Thames, F. C and Mastin, C.W (1976). "TOMCAT- A Code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate System of Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies". Mississippi State University.
- [7]- Mobley, C. D and Stewart, R. T (1980). "Note on the Numerical Generation of Boundary Fitted Orthogonal Curvilinear Coordinate Systems". J. Comput. Phys. Vol.34,pp.124-135.