

Optimisation d'un écoulement de couche limite par la méthode E.G.M, 'Entropy Generation Minimization'

A. Maougal^{1*}, A. Chaker¹ et M.H. Chibat²

¹ Laboratoire de Physique Energétique, Université Mentouri, Constantine, Algérie

² Département de Mathématique, Université Mentouri, Constantine, Algérie

Résumé - Ce travail s'inscrit dans le cadre de la performance des systèmes dynamiques. Il utilise comme paramètre d'optimisation le principe de minimisation de la production d'entropie. Le système physique étudié est constitué d'un dièdre plan à parois chauffées autour duquel s'écoule un fluide Newtonien, visqueux et incompressible. On considère un nombre de Prandtl égal à 0.7. Le couplage des équations de la couche limite tridimensionnelle, de l'énergie et de la production d'entropie est résolu après avoir transformé le système d'équations différentielles en un système d'équations ordinaires. La solution du problème est réalisée par l'élaboration d'un code de calcul utilisant l'algorithme de Runge-kutta d'ordre quatre, ainsi que la méthode du tir. Les champs dynamiques et thermiques obtenus sont en parfait accord avec la bibliographie. L'exploitation des résultats obtenus nous permet d'affirmer que la production d'entropie diminue avec la température, mais augmente avec le nombre d'Eckert et la fonction d'irréversibilité en terme de Br/Ω , en outre il existe une géométrie optimale du dièdre correspondant à la valeur $\beta = 0$.

Abstract - This work is part of the performance of dynamic systems. It uses as a parameter optimization, the principle of minimizing the production of entropy. Studied the physical system consists of a corner plan heated walls around which flows Newtonian fluid, viscous and incompressible. We consider a number of Prandtl equal to 0.7. The coupled equations of three-dimensional boundary layer, energy and production of entropy is resolved, after having transformed the system of differential equations into a regular system of equations. The solution is achieved by developing a computer code using the algorithm of Runge-Kutta of order four, and the method of shooting. The dynamic and thermal fields obtained are in perfect agreement with the literature. The operating results we can say that the entropy production decreases with temperature, but increases with the number of Eckert and function of irreversibility in terms of Br/Ω , in addition there is an optimum dihedral geometry corresponding to the value $\beta = 0$.

Mots clés: Ecoulement - Couches limites – Dièdre – Méthode E.G.M. – Optimisation.

1. INTRODUCTION

Le besoin et la soif d'aboutir à des systèmes de plus en plus performants ont conduit au concept de la minimisation de la production d'entropie [3]. L'étude que nous présentons dans le cadre de ce travail s'inscrit dans ce contexte. Il s'agit de déterminer les paramètres thermiques et géométriques optimisant notre système physique constitué d'un écoulement de couche limite tridimensionnelle autour d'un dièdre plan à parois chauffées, et à angle au sommet variable.

Nous examinerons l'effet de l'angle du dièdre, (paramètre géométrique), sur la production de l'entropie, et sur le transfert de chaleur entre le dièdre et l'écoulement du

* Abdel.Maougal@Laposte.Net _ Chakamine@Yahoo.Fr _ Chibat@Yahoo.Fr

fluide. Par ailleurs, nous déterminerons les conditions optimales de l'écoulement en termes d'un meilleur transfert thermique, (paroi-fluide), et d'une contrainte à la paroi aussi faible que possible. Le paramètre β , proportionnel à l'angle du dièdre, prend les valeurs suivantes: 0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0.

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le système physique étudié est représenté sur la figure 1. Il s'agit de la projection sur le plan (x, y) d'un dièdre plan à angle au sommet variable dont les parois sont chauffées, et autour duquel se développe une couche limite à trois dimensions. Le paramètre β est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$. L'origine des coordonnées est placée au sommet du dièdre, l'axe des x coïncide avec sa paroi supérieure.

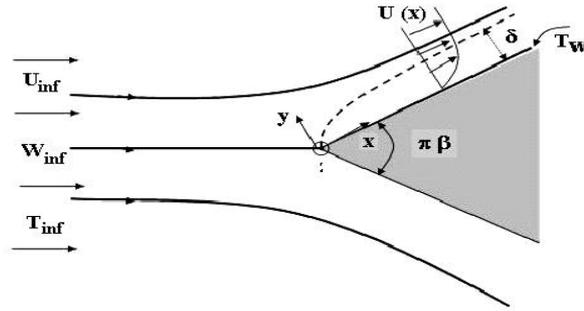


Fig. 1: Représentation schématique du système physique

En appliquant les approximations de la couche limite sur les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et de la génération de l'entropie, nous obtenons les équations suivantes avec les conditions aux limites appropriées.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = W_{\infty} \frac{\partial W_{\infty}}{\partial x} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{v}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{C_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\mathcal{S}_{gen}'' = \frac{k}{T^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$y = 0 \quad u = v = w = 0 \quad T = T_w \quad (6)$$

$$y = \infty \quad u = U_\infty \quad w = W_\infty \quad T = T_\infty \quad (7)$$

Au voisinage de la pointe du dièdre, la distribution des vitesses est de la forme:

$$U_\infty = C \cdot x^m, \quad W_\infty \text{ est supposée constante} \quad (8)$$

On introduit la fonction f dépendant de la variable η , et la fonction de courant $\Psi(x, y)$, tel que [1]:

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{(m+1) \cdot U_\infty}{2 \cdot v \cdot x}}, \quad f(\eta) = \frac{\Psi(x, y)}{x \cdot U_\infty} \times \sqrt{\frac{(m+1) \cdot U_\infty \cdot x}{2 \cdot v}} \quad (9)$$

En les substituant dans l'équation, on obtient:

$$u = U_\infty \cdot f' \quad (10)$$

$$v = -\sqrt{\frac{2 \cdot v \cdot U_\infty}{(m+1) \cdot x}} \times \left(\frac{m+1}{2} \cdot f + \frac{m-1}{2} \cdot \eta \cdot f' \right) \quad (11)$$

$$T = T_\infty + \alpha \cdot x^b \cdot \theta_1(\eta) + \frac{U_\infty^2}{C_p} \cdot \theta_2(\eta) + \frac{W_\infty^2}{C_p} \cdot \theta_3(\eta) \quad (12)$$

Où f , g , θ_1 , θ_2 et θ_3 sont solutions du système d'équations ordinaires suivant:

$$f''' + f f'' + \beta \cdot (1 - f'^2) = 0 \quad (13)$$

$$g'' + f g' = 0 \quad (14)$$

$$\theta_1'' + P_r \cdot f \cdot \theta_1' - b \cdot (2 - \beta) \cdot P_r \cdot f' \cdot \theta_1 = 0 \quad (15)$$

$$\theta_2'' + P_r \cdot f \cdot \theta_2' - 2\beta \cdot P_r \cdot f' \cdot \theta_2 + P_r \cdot f'' = 0 \quad (16)$$

$$\theta_3'' + P_r \cdot f \cdot \theta_3' + P_r \cdot g'^2 = 0 \quad (17)$$

Avec les conditions aux limites:

$$\eta = 0, \quad f = f' = g = 0, \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \theta_3 = 0 \quad (18)$$

$$\eta = 1, \quad f' = g = 1, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0 \quad (19)$$

2.1 Equation de la production d'entropie

Les normalisations suivantes appliquées à l'équation (5), nous permettent d'aboutir à l'équation (21) de la production d'entropie:

$$\underline{x} = \frac{x}{L}, \quad \underline{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_w - T_\infty,$$

$$\Omega = \frac{\Delta T}{T_\infty}, \quad Br = Pr \cdot E, \quad \phi = \frac{Br}{\Omega} \quad (20)$$

$$\mathcal{S}_{gen}'' = k \cdot \Omega^2 \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \cdot \left[\left(\theta_1' + E \cdot \left(\theta_2' + \left(\frac{W_\infty}{U_\infty} \right)^2 \right) \cdot \theta_3' \right)^2 + \phi \left((f'')^2 + (g')^2 \right) \right] \quad (21)$$

En considérant que $W_\infty \approx U_\infty$, nous en déduisons une corrélation du nombre entropique:

$$N_s = \left(\theta_1' + E \left(\theta_2' + \theta_3' \right) \right)^2 + \phi \left((f'')^2 + (g')^2 \right) \quad (22)$$

Le système d'équations (13-17) couplés avec (22) est résolu par la méthode de Runge-Kutta au quatrième ordre. En appendice, les conditions initiales obtenues par la méthode du tir nécessaires pour la résolution du problème sont représentées dans le **tableau 1**.

2.2 Coefficient transfert thermique

Dans le cas d'un écoulement de couche limite, le coefficient de transfert thermique, est donné par la relation [4]:

$$h = -\theta'(0) \cdot \sqrt{\frac{(m+1)U_\infty}{2\nu x}} \quad (23)$$

$$\text{Avec } \theta'(0) = \theta_1'(0) + E \cdot (\theta_2'(0) + \theta_3'(0)) \quad (24)$$

2.3 Contrainte à la paroi

La contrainte à la paroi est donnée par la relation [9]

$$\tau_p = \rho \cdot U_\infty^2 \cdot \sqrt{\frac{m+1}{R_x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_x}} f''(0) \quad (25)$$

3. DISCUSSION DES RESULTATS

Les figures 2, 3, et 4 représentant respectivement les champs dynamiques et thermiques de l'écoulement sont en parfait accord avec la littérature [2].

La figure 2 représente la solution de l'équation (13) connue sous le nom de l'équation de Falkner-Skan [5], où f' est proportionnelle à la composante u de la vitesse. Pour $\eta = 0$, $u = 0$, condition de non glissement du fluide à la paroi. Pour $\eta = \infty$, l'écoulement est en dehors de la couche limite, soit $f' = 0$, i.e. $u = U_\infty$. Par conséquent, la vitesse augmente de 0 à sa valeur limite U_∞ . L'angle du dièdre accélère

le fluide, ce qui explique l'augmentation de la vitesse avec le paramètre β , comme il est indiqué sur la figure 2.

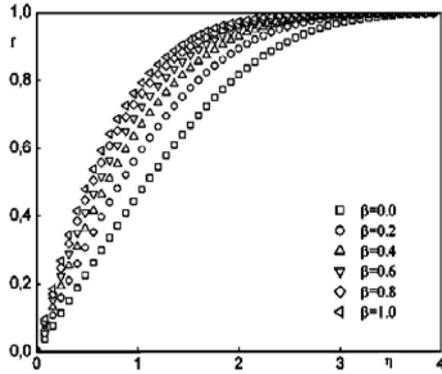


Fig. 2: Effet du paramètre β sur le profil de f

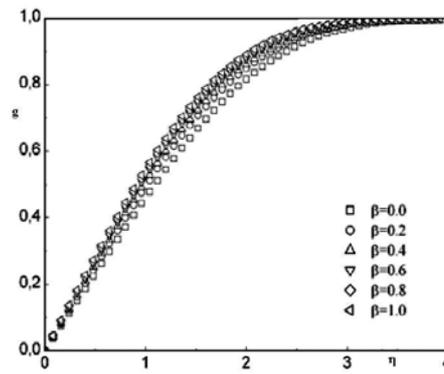


Fig. 3: Effet du paramètre β sur le profil de g

La figure 3 montre les variations de la fonction g , proportionnelle à la composante w de la vitesse, fonction de β . L'écoulement est accéléré par l'écartement du dièdre, mais pas autant que dans le cas précédent, w n'est pas la direction privilégiée de l'écoulement.

Le champ de températures en fonction de β est représenté sur la figure 4, avec $Pr = 0.7$ et $b = 0$. Sur la paroi, $\eta = 0$, $T = T_w$, i.e., $\theta = 1$. Loin de la paroi, on a $\eta = \infty$ et $T = T_\infty$ ce qui est équivalent à $\theta = 0$. La figure 4 montre que le paramètre β n'influe pratiquement pas sur la température, mais permet de noter que la température est maximale dans le cas où $\beta = 0$, ce qui correspondrait au transfert thermique optimal (paroi-fluide). Ce fait sera confirmé par les figures suivantes.

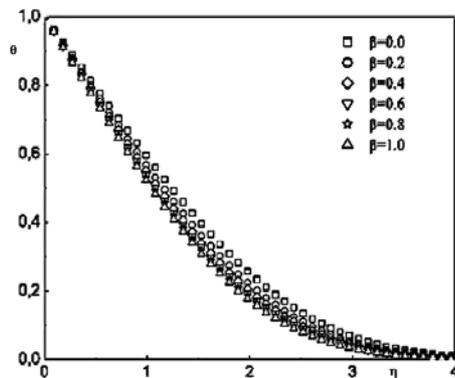


Fig. 4: Effet du paramètre β sur la température adimensionnelle

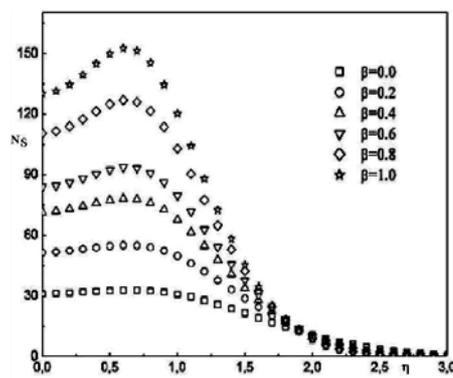


Fig. 5: Profil du nombre entropique N_s pour différentes valeurs de β

La figure 5 représente les variations de la production d'entropie en fonction de η pour les différentes valeurs de β . Il est clair que N_s , le nombre entropique est minimal pour la valeur $\beta = 0$, cas de la plaque plane.

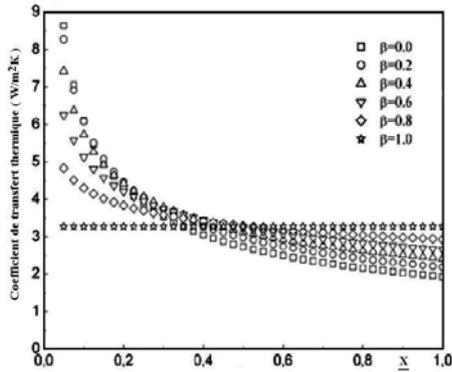


Fig. 6: Variation du coefficient de transfert thermique pour différentes valeurs du paramètre β

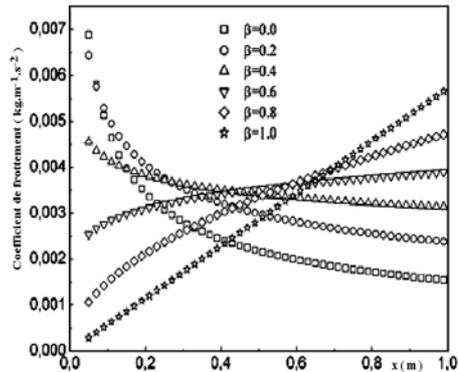


Fig. 7: Variation du coefficient de frottement en fonction de β le long de la paroi

Les figures 6 et 7, nous permettent de constater que le maximum du transfert thermique entre la paroi et le fluide, ainsi que le minimum du frottement correspondent au cas de la plaque plane, ce qui est en parfait accord avec la méthode (E-G-M). La valeur $\beta = 0$ correspond au cas optimal. Par ailleurs, notre intérêt est porté également sur l'effet de la fonction $\phi = Br / \Omega$ dite, distribution d'irréversibilité sur le nombre entropique.

La figure 8 illustre ce point: ce qui conduit à conclure que la production d'entropie augmente avec la fonction ϕ , cela est équivalent de dire: qu'elle diminue avec la différence de température entre la paroi et le fluide, et augmenterait avec le nombre d'Eckert ce qui en accord avec les références citées précédemment.

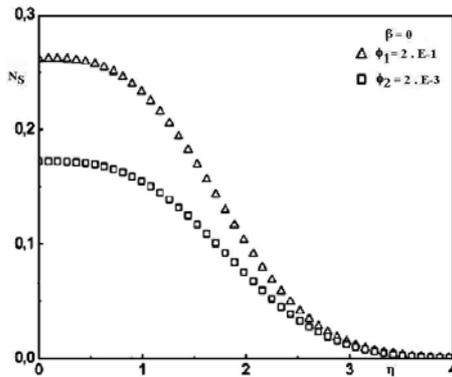


Fig. 8: Effet de la fonction d'irréversibilité ϕ la génération d'entropie dans le cas optimal, celui de la plaque plane

4. CONCLUSION

La génération de l'entropie est une mesure de l'irréversibilité. Cette méthode permet l'optimisation de vrais systèmes thermiques, et pourrait être convenue pour des applications spécifiques. Dans l'étude que nous présentons, nous avons analysé l'effet que peut avoir un paramètre géométrique, qui n'est autre que l'angle d'écartement d'un dièdre plan à parois chauffées, sur l'entropie produite dans le cas d'un écoulement de couche limite. Nous avons abouti aux conclusions suivantes: pour conserver au mieux l'énergie dans un processus d'écoulement de fluide, nous devons réduire au maximum l'entropie produite, traduite par la fonction d'irréversibilité ϕ , et, le cas où $\beta = 0$, cas d'une plaque placée parallèlement aux lignes de courants d'un écoulement, représente le cas optimal du point de vue thermique et dynamique. Ce qui est en accord avec la philosophie, (E-G-M), [6].

NOMENCLATURE

b	Exposant de la distribution de température	k	conductivité thermique, ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)
B_r	Nombre de Brinkman	L	Longueur caractéristique (m)
C	Constante arbitraire	m	Constante égale à $\beta/2 - \beta$
C_p	Capacité calorifique à pression constante, ($\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	N_s	Nombre lié à la génération d'entropie
E	Nombre d'Eckert, $U_2/C_p (\Delta T)_0$	P_r	Nombre de Prandtl
h	Coefficient de transfert thermique, ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)	R_x	Nombre de Reynolds
u	Composante de la vitesse suivant la direction x, (m.s^{-1})	S_{gen}^m	Génération d'entropie, ($\text{W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$)
U	Vitesse à l'amont suivant la direction x, (m.s^{-1})	T	Température du fluide, (K)
v	Composante de la vitesse suivant la direction y, (m.s^{-1})	T_∞	Température loin de l'obstacle, (K)
w	Composante de la vitesse à l'amont suivant la direction z, (m.s^{-1})	T_w	Température de la paroi, (K)
W	Vitesse à l'amont suivant la direction z, (m.s^{-1})	x, y, z	Coordonnées, (m)
\bar{x}, \bar{y}	Coordonnées sans dimensions	ΔT	Ecart de température, (K)
<i>Lettres grecques</i>			
α	Paramètre lié à la distribution de la température	β	Paramètre lié à l'angle dièdre
δ	Epaisseur de déplacement de la couche limite, (m)	μ	Viscosité dynamique, (N.s.m^{-2})
ρ	Masse volumique, (kg.m^{-3})	ν	Viscosité cinématique, ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
θ	Température normalisée	ϕ	Fonction d'irréversibilité
$\Psi(x, y)$	Epaisseur de déplacement de la couche limite, (m)	Ω	Ecart de température normalisé
τ_p	Contrainte à la paroi ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$)		

REFERENCES

- [1] O. David, 'A Self-Similar Solution for Forced Convection Boundary Layer Flow of E FENE-P Fluid', Department of Mathematical sciences, University of Delaware, Newark, DE 19716, USA, Applied Mathematics Letters, 2006.
- [2] H. Schlichting, 'Boundary-Layer Theory', Mac Graw Hill, 7nd Edition, 1978.
- [3] A. Bejan, 'Advanced Engineering Thermodynamics', 2nd Ed., John Wiley, USA, 1997.
- [4] F.M. White, 'Viscous Fluid Flow', Mc Graw-Hill, 1991.
- [5] V.M. Falkner and S.W. Skan, 'Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations', Phil. Mag., Vol. 12, pp. 865 – 896, 1931.
- [6] P. Salamon, K.H. Hoffman, S. Shubert, R.S. Berry and B. Andresen, 'What Conditions Make Minimum Entropy Production Equivalent to Maximum Power Production?', Journal of non-Equilibrium Thermodynamics, Vol. 26, pp. 73 – 83, 2001.

APPENDICE

Le passage d'un problème aux conditions aux limites, (*BVP*): *Boundary Value Problem*, à un problème aux conditions initiales, (*IVP*): *Initial Value Problem*, fait appel aux constantes résumées dans le tableau ci-dessous, calculées par la méthode du tir:

Tableau 1: Conditions initiales nécessaires pour résoudre le système d'équations (13-17), $Pr = 0.7$

β	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$	$\theta_3'(0)$	$f''(0)$	$g'(0)$
0.0	-0.414	0.1729	0.1729	0.4696	0.4696
0.2	-0.444	0.2157	0.1867	0.6867	0.5068
0.4	-0.463	0.2527	0.1953	0.8544	0.5300
0.6	-0.476	0.2851	0.2016	0.9457	0.5436
0.8	-0.489	0.3146	0.2065	1.1202	0.5598
1.0	-0.495	0.3427	0.2103	1.2325	0.5704