THEOREME DE POINT FIXE:
APPLICATION A L'EXISTENCE DE L'EQUILIBRE POUR LES MODELES DYNAMIQUES

Reçu le 18/04/1999 – Accepté le 02/10/2000

Dans leur article, Idzik et Simonsen [5] ont démontré l'existence de l'équilibre avec production pour le modèle Arrow-Debreu avec une infinité dénombrable de périodes (appelé modèle dynamique). Les préférences des consommateurs sont représentées par des fonctions d'utilité présentant des externalités [(1)]. Leur approche est basée sur la théorie du jeu [1], [2], [3], [4], [6],...

Dans cet article, on étend le résultat [5] à des préférences intransitives (correspondance de préférences) avec externalités. Nous donnons une démonstration rapide basée sur le théorème de point fixe de Gale et Mas-Collel [4].

***Mots clés**: Modèle Arrow-Debreu non durable - Modèle Arrow-Debreu durable - Quasi-équilibre - Equilibre.*

In their publication, Idzik and Semonsen [5] have prooved the existence of equilibrium production for the Arrow-Debreu model with an infinite countably periods (called dynamic model). The consumer preferences are represented by utility functions where exhibit externalities. Their approach is based on the game theory [1], [2], [3], [4], [6],...

In this paper, we extend the result [5] to the intransitive preferences (correspondence of preferences) with externalities. We gave a rapid proof based on fixed point theorem of Gale and Mas-Collel [4].

***Key words**: Non durable model of Arrow-Debreu - durable model of Arrow-Debreu - Quasi-equilibrium - equilibrium.*

Classification: AMS 1991, C62, D51.

M. DEGHDAK
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mentouri
25000 Constantine (Algérie)

ملخص

برهن Idzik و Simonsen [5] عن وجود توازن الإنتاج بالنسبة لنموذج Arrow-Debreu مع عدد غير منتهي (قابل للعد) من الدورات (يُسمى النموذج الديناميكي). اختيارات المستهلكين ممثلة بدلالة منفعة تتعلق بعوامل خارجية. اعتمد [5] على نظرية اللعبة [1], [2], [3], [4], [5], [6]...

في هذا المقال نعمم [5] إلى اختيارات غير متعدية تتعلق بعوامل خارجية. نعطي برهانا مبسطا يعتمد على نظرية النقطة الثابتة لـ Gale و Mas-Collel [4].

***المفردات المفاتيح:** نموذج Arrow-Debreu غير دائم - نموذج Arrow-Debreu دائم - شبه التوازن - توازن.*

I- LE MODELE

Comme dans [5], pour simplifier, on considère dans notre modèle un seul consommateur et un seul producteur. La généralisation à un nombre fini de consommateurs et de producteurs ne pose aucune difficulté. Définissons le modèle considéré dans cet article.

Soit $T = \{0,1,...,t,...\}$ l'ensemble des dates.

$\forall t \in T$, le consommateur a un ensemble de consommation $X_t \subset R^l$.

$\forall t \in T$, le producteur a un ensemble de production $Y_t \subset R^l$.

Pour chaque période $t \in T$, les préférences du consommateur sont représentées par une correspondance de préférence $P_t : Z \to X_t$ où:

$$Z = \prod_{t\in T} X_t \times \prod_{t\in T} Y_t \times \prod_{t\in T} P^t \text{ avec } P^t = P^1 = \left\{ p \in R^l : \sum_{i=1}^{l} p_i, \quad p_i \geq 0 \right\}.$$

$\forall t \in T$, $\forall (x, y, p) \in Z$, $P_t(x, y, p)$ est interprété comme l'ensemble des éléments préférés à x_t par le consommateur lorsque ses consommations $x_{t'} \in \prod_{t\neq t'} X_t$, la production y et le prix p sont fixés.

Pour tout $t \in T$, désignons respectivement par $\alpha_t : Z \to \mathbb{R}$ et par $v_t : Z \to \mathbb{R}$ la fonction revenu du consommateur à la période t et la fonction valeur de production du producteur à la période t.

---

(1) La fonction d'utilité du consommateur dépend des consommations des autres consommateurs, de la production et du prix du marché.

Rappelons maintenant le théorème de Gale et Mas-Collel généralisé dans Florenzano [4] sur lequel s'appuie l'existence de l'équilibre pour le modèle:

Théorème III.1: *Soit* $X = \prod_{i \in I} X^i$ *le produit d'un nombre fini ou dénombrable de sous-ensembles* X^i, *convexes et compacts d'un espace euclidien de dimension finie. Soit pour tout* $i \in I$, $\varphi^i : X \to X^i$ *une correspondance (l'ensemble de ses valeurs est éventuellement vide) à valeurs convexes et semi-continue inférieurement (sci). Alors:*

$$\exists \bar{x} \in X \qquad \bar{x}^i \in \varphi^i(\bar{x}) \quad \text{ou} \quad \varphi^i(\bar{x}) = \varnothing .$$

Théorème III.2: *Sous les hypothèses A.1, ..., A.7, E admet un quasi-équilibre.*

Démonstration:

Pour tout $t \in T$, considérons les correspondances $\varphi_t^{(0)}, \varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)}$, définies par:

$$\varphi_t^{(0)} : Z \to P^1$$

$$(x, y, p) \to \varphi_t^{(0)}(x, y, p) = \{q_t \in P^1 : (q_t - p_t)(\vartheta_t \circ x_t - \mu_t \circ y_t) > 0\};$$

$$\varphi_t^{(1)} : Z \to Y_t$$

$(x, y, p) \to$ **Error! Bookmark not defined.**

où $z'_{t'} \in \prod_{t' \neq t} Y_t$.

$$\varphi_t^{(2)} : Z \to X_t$$

$(x, y, p) \to$ **Error! Bookmark not defined.**

$$\begin{cases} \delta_t(x, y, p) & x_t \notin \gamma_t(x, y, p); \\ \delta_t(x, y, p) \cap CoP_t(x, y, p) & x_t \in .\gamma_t(x, y, p). \end{cases}$$

Vérifions que ces correspondances satisfassent aux conditions du théorème III.1.

$\forall t \in T$, il est facile de voir que les correspondances $\varphi_t^{(0)}, \varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)}$ sont irréflexives et à valeurs convexes.

$\forall t \in T$, $\varphi_t^{(0)}$ est sci (car elle est à graphe ouvert par continuité du produit scalaire).

$\forall t \in T$, $\varphi_t^{(1)}$ est sci (car elle est à graphe ouvert d'après A.7).

Enfin, $\forall t \in T$, $\varphi_t^{(2)}$ est sci (d'après la scs γ_t et de la sci δ_t de). D'où il existe $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in Z$ tel que:

$$\varphi_t^{(0)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \varnothing \qquad \varphi_t^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \varnothing \qquad \varphi_t^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \varnothing$$

c'est-à-dire :

$$\forall q_t \in P^l : (q_t - \bar{p}_t)(\vartheta_t \circ \bar{x}_t - \mu_t \circ \bar{y}_t) \leq 0 \qquad (3)$$

$$\forall z_t \in Y_t : v_t(\bar{x}, z_t, z'_{t'}, \bar{p}) \leq v_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \qquad z'_{t'} \in \prod_{t' \neq t} Y_t ;$$

avec:

$$\forall t \in T, \bar{x}_t \in \gamma_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \text{ et } P_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \cap \delta_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \varnothing .$$

On voit donc que les conditions a) et b) dans II sont vérifiées. Il reste à montrer la condition a) de II, i.e, $\forall t \in T, \mu_t \circ \bar{y}_t \geq \vartheta_t \circ \bar{x}_t$. Puisque le modèle E est non durable et $\forall t \in T$, $\bar{x}_t \in \gamma_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$, on en déduit de (3) la relation suivante:

$$\forall q_t \in P^l : q_t(\vartheta_t \circ \bar{x}_t - \mu_t \circ \bar{y}_t) \leq 0$$

Cette dernière relation signifie que $\vartheta_t \circ \bar{x}_t - \mu_t \circ \bar{y}_t$ appartient au polaire de R_+^l et donc $\vartheta_t \circ \bar{x}_t - \mu_t \circ \bar{y}_t \leq 0$.

IV- EXISTENCE DU QUASI-EQUILIBRE POUR LE MODELE DURABLE

Théorème IV.1: *Sous les hypothèses du théorème III.2, le modèle durable E admet un quasi-équilibre.*

Démonstration:

La démonstration est presque la même que celle du théorème III.2; il suffit de remplacer $\varphi_t^{(0)}$ par $\varphi'_t : Z \to P^l$ définie par:

$$(x, y, p) \to \varphi'_t(x, y, p) = \left\{ q_t \in P^l : (q_t - p_t)\left(\sum_{r=0}^{t} \vartheta_r \circ x_r - \sum_{r=0}^{t} \mu_r \circ y_r \right) > 0 \right\}.$$

V- PASSAGE DU QUASI-EQUILIBRE A L'EQUILIBRE

Pour passer du quasi-équilibre à l'équilibre dans les théorèmes III.2 et IV.1, on fait les hypothèses supplémentaires suivantes:

A.8. $\forall t \in T, \forall (x, y, p) \in Z, P_t(x, y, p)$ est ouvert dans X_t et convexe;

A. 9. $\forall t \in T, \forall (x, y, p) \in Z, \delta_t(x, y, p) \neq \varnothing$.

L'hypothèse A.8 est une hypothèse standard pour passer du quasi-équilibre à l'équilibre.

Théorème V.1: *Sous les hypothèses postulées dans les théorèmes III.2 et IV.1 et les hypothèses A.8 et A.9, le modèle durable et non durable E admet un équilibre.*

Démonstration:

Soit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ le quasi-équilibre obtenu dans les théorèmes III.2 et IV.1. Si $z_t \in \gamma_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \cap P_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$, on a:

$$x'_t \in \delta_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \Rightarrow \alpha x'_t + (1 - \alpha) z_t \in \delta_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}), \quad \forall 0 < \alpha \leq 1.$$

D'après A.8, on a:

$$\delta_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \cap P_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}), \quad \forall 0 < \alpha \leq 1.$$

Ce qui contredit la définition de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$.

Remarque:

Par troncature du modèle E [2] (voir, [3], [4]), on peut supposer dans les théorèmes III.2 et IV.1, X_t et Y_t sont convexes et fermés et les ensembles réalisables $X_t^{'}$ et $Y_t^{'}$ du consommateur et producteur sont compacts:

$$X_t^{'} = \{x_t \in X_t : \vartheta_t \circ x_t - \mu_t \circ y_t \leq 0\,, \quad \forall y_t \in Y_t\};$$
$$Y_t^{'} = \{y_t \in Y_t : \vartheta_t \circ x_t - \mu_t \circ y_t \leq 0\,, \quad \forall x_t \in X_t\}$$

(2) C'est le modèle E' obtenu à partir de E en interceptant les ensembles de consommation et de production du modèle E par des ensembles compacts.

REFERENCES

[1]- Arrow K.J and Debreu G., "Existence of an equilibrium for a competitive economy", *Econometrica* 22 (1954), pp. 265-290.

[2]- Flam, S.D., Equilibria in noncooperative games and competitive economies, *Tamkang J. Math*., 12 (1981), 47-57.

[3]- Florenzano M., Equilibre général transitif et intransitif "Problèmes d'existence", Monographies du Séminaire d'Econométrie, Editions du CNRS, Paris, France, (1981).

[4]- Florenzano M., "Quasiequilibria in Abstract Economies. Application to the Overlapping Generations Model", *Journal of Mathematical, Analysis and Applications*, Vol 182 (1994), pp. 616-636.

[5]- Idzik A. and Simonsen P.B., Non-durable and durable economic process in a dynamic model of production and consumption, Ed. Academia publishing house of Czechoslovak Academy of Sciences (1988).

[6]- Makarov V.L. and Rubinov A.M., Mathematical theory of economic dynamics and equilibria, Ed. Springer-Verlag, New York (1977).