SUR UNE CERTAINE CLASSE D'OPERATEURS A SPECTRE CONCENTRE EN UN POINT DANS UN ESPACE DE HILBERT

Reçu le 27/02/2000 – Accepté le 15/11/2000

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines classes d'opérateurs qui sont parfaitement définis par leur spectre. Pour ces opérateurs (définis dans des espaces de Hilbert abstraits), on donnera une représentation explicite et uniquement à l'aide du spectre dans l'espace des fonctions à carrés intégrables.

Mots clés: *Contraction simple, nœud unitaire, couplage de nœuds unitaires, opérateurs unitairement équivalents.*

Classification: AMS 47 A 45

Abstract

This paper is devoted for the study of certain class of operators, which can be defined perfectly by their spectra. For these operators (defined in abstract Hilbert space), we give an explicit representation only by means of the spectrum in square integrable functions spaces.

Key words: *Simple contraction, unitary nœud, Product of unitary nœuds, Unitarily equivalent operators.*

B. BENDOUKHA
Département de Mathématiques
Université de Mostaganem
B.P. 227 Mostaganem
(27000) Algérie

ملخص

في هذا المقال سوف نبرز صنفا من المؤثرات الخطية تكون معرفة تماما بإعطاء طيفها. من أجل هذه المؤثرات المعرفة في فضاء هلبرتي مبهم سوف نعطي صيغة تمثيلية في فضاء الدوال ذات المربعات القابلة للمكاملة و هذا بدلالة الطيف فقط.

الكلمات المفاتيح: *تقليص مبسط، عقدة أحادية، جداء العقد الأحادية، مؤثرات متكافئة.*

Dans le présent travail, on s'intéresse à une certaine classe de contractions ($\| T \| \leq 1$) possédant toutes le même spectre concentré en un point qui n'est pas valeur propre. Pour ces opérateurs, on propose un procédé permettant de les reconstituer uniquement à l'aide du spectre. Pour cela, nous construisons (à l'aide du spectre uniquement) un opérateur modèle, et puis nous démontrons que chaque opérateur étudié est unitairement équivalent à la projection de l'opérateur modèle sur un sous-espace invariant. Un tel procédé fut pour la première fois proposé par Issaev L.E. [1] pour les opérateurs dissipatifs ($ImA \geq 0$) à spectre entièrement concentré en zéro. Par la suite, Livschits M.S. et Yancévich A.A. [2] et plus tard Abbaoui L.[3] étendirent la méthode de Issaev L.E. aux opérateurs et systèmes d'opérateurs commutants à spectre continu concentré en zéro. Ces résultats ont trouvé une large application dans l'étude de certaines classes de processus de la forme $X(t) = e^{itA} X_0$ où A est un opérateur non autoadjoint [2,4,5]. Signalons, cependant, que pour les contractions, il existe d'autres modèles. Les plus connus sont les modèles dits fonctionnels [6,7]. Les modèles que nous proposons se distinguent des modèles fonctionnels par le fait que les premiers s'expriment uniquement et explicitement à l'aide du spectre et agissent dans les espaces usuels des fonctions à carrés sommables tandis que les seconds, sont définis dans des espaces construits à l'aide des classes de Hardy et nécessitent beaucoup plus d'informations (que la seule donnée du spectre) pour leur expression, ce qui rend leur construction et manipulation assez laborieuses.

Définition 1.1. *L'ensemble* $\Delta = (H, E, F, T, \Phi, \Psi, K)$ *constitué d'espaces de Hilbert séparables H, E, F vérifiant (dim* $(H \oplus E)$ *= dim* $(H \oplus F)$*) et d'opérateurs linéaires bornés* $T \in L(H)$*;* $\Phi \in L(E,H)$*;* $\Psi \in (H,F)$*,* $K \in L(E,F)$*; est appelé nœud unitaire si:*

$$\begin{bmatrix} T^* & \Psi^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_E \end{bmatrix}; \qquad (1.1)$$

$$\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* & \Psi^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_F \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

L'espace H et l'opérateur T sont respectivement appelés espace intérieur et opérateur principal du nœud Δ. Les relations (1.1) et (1.2) signifient que la matrice bloc $\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}$ constitue un opérateur unitaire de $H \oplus E$ dans $H \oplus F$ et que l'opérateur principal de tout nœud unitaire est une contraction large. Inversement, si T est une contraction définie dans un espace de Hilbert séparable H, alors en posant $H = E = F$; $\Phi = (I-TT^*)^{1/2}$; $\Psi = (I-T^*T)^{1/2}$ on obtient un nœud unitaire Δ dont l'espace intérieur et l'opérateur principal sont respectivement H et T.

__Définition 1.2__. *Une contraction T définie dans un Hilbert H est dite simple si dans H, il n'existe aucun sous espace invariant pour T et T^* et dans lequel T induit un opérateur unitaire.*

On sait, d'après [6], que pour toute contraction T définie dans un Hilbert séparable H, il existe une décomposition unique de H en somme orthogonale de deux sous espaces invariants H_0 et H_1 tels que la restriction T_0 de T à H_0 soit un opérateur unitaire et la restriction T_1 de T à H_1 une contraction simple.

__Proposition 1.3__. *Une contraction simple ne peut avoir de valeurs propres situées sur le cercle unité.*

Des relations (1.1) et (1.2) découle que $\Psi H_0 = \{0\} = \Phi^* H_0$ et les ensembles $\Delta_{H_1} = (H_1, E, F, T_1, \Phi, \Psi, K)$; $\Delta_{H_0} = (H_0, E, E, T_0, 0, 0, I_E)$ forment des nœuds unitaires. ΔH_1 est appelée partie simple de Δ et ΔH_0 sa partie complémentaire. Si $H = H_1$ (dans ce cas $T = T_1$), alors le nœud Δ est dit simple.

Soient maintenant $\Delta_p = (H_p, E_p, F_p, T_p, \Phi_p, \Psi_p, K_p)$; ($p$ = 1,2) deux nœuds unitaires tels que $E_1 = F_2$.

Posons: $H = H_1 \oplus H_2$ (somme orthogonale); $E = E_2$; $F = F_1$; $T = T_1P_1 + T_2P_2 + \Phi_1\Psi_2P_2$; $\Phi = \Phi_2 + \Phi_1K_2$; $\Psi = \Psi_1P_1 + K_1\Psi_2P_2$; $K = K_1K_2$.

L'opérateur P_i désigne l'orthoprojecteur sur H_i.

Un calcul direct permet d'affirmer que l'ensemble $\Delta = (H, E, F, T, \Phi, \Psi, K)$ est un nœud unitaire.

__Définition 1.4__. *Le nœud unitaire défini par les formules précédentes est appelé couplage des nœuds Δ_1 et Δ_2 et est noté $\Delta = \Delta_1\Delta_2$.*

Remarquons que tout nœud unitaire est égal au couplage de sa partie simple et de sa partie complémentaire et que si $\Delta = \Delta_1\Delta_2$, alors l'espace intérieur H_1 de Δ_1 est invariant par rapport à T.

__Définition 1.5__. *Soit $\Delta = (H, E, F, T, \Phi, \Psi, K)$ un nœud unitaire. On appelle fonction caractéristique de Δ la fonction définie de l'ensemble $D = \{\lambda \in C : |\lambda| \pi 1\}$ dans $L(F,E)$ par la relation $S_\Delta(\lambda) = K^* + \lambda\Phi^*(I - \lambda T^*)^{-1}\Psi^*$.*

Il est clair que la fonction $S_\Delta(\lambda)$ est holomorphe dans D; de plus, ses valeurs sont des opérateurs linéaires bornés de F dans E. Un calcul direct nous donne la relation:

$$I_E - S_\Delta^*(\lambda)S_\Delta(\mu) = (1 - \lambda\bar{\mu})\Psi(I - \bar{\mu}T^*)^{-1}(I - \lambda T^*)^{-1}\Psi^*$$

de laquelle découle:

$$I_E - S_\Delta^*(\lambda)S_\Delta(\lambda) \geq 0; \ (|\lambda| \pi 1). \qquad (1.3)$$

Pour une connaissance plus approfondie des nœuds unitaires et de leurs fonctions caractéristiques, il est recommandé de voir [7]. Rappelons cependant de ce même article trois résultats importants pour la suite.

__Théorème A__. *Si $\Delta = \Delta_1\Delta_2$, alors $S_\Delta(\lambda) = S_{\Delta_1}(\lambda)S_{\Delta_2}(\lambda)$.*

__Théorème B__. *Si deux nœuds unitaires simples Δ_1 et Δ_2 ont la même fonction caractéristique, alors ils sont unitairement équivalents , i.e. il existe un opérateur unitaire U défini de H_1 dans H_2 et tel que:*

$$T_1 = U^{-1}T_2U; \ \Psi_1 = \Psi_2U; \ \Phi_1 = U^{-1}\Phi_2.$$

__Théorème C__. *La fonction caractéristique d'un nœud unitaire, coïncide avec celle de sa partie simple.*

Supposons maintenant que le spectre de T soit entièrement concentré en un point a situé sur le cercle unité et que $dim(I - T^*T)H \pi +\infty$. On peut sans restreindre la généralité, supposer que a = 1 (dans le cas contraire, il suffirait de remplacer T par $a^{-1}T$).

Puisque $dim(I - T^*T)H = dim(I - TT^*)\ H$ (car T est inversible), alors d'après [8], il est possible d'inclure T dans un nœud unitaire avec $E = F$ et $dim E = dim(I - TT^*)H$.

__Proposition 1.6__. *Soit $\Delta = (H, E, F, T, \Phi, \Psi, K)$ un nœud unitaire. Si T est inversible alors K est aussi inversible.*

De la relation $K^* = S_\Delta(0)$ et de la formule (1.3), découle que $S_\Delta(\lambda)$ est une matrice contractante dont le déterminant n'est pas identiquement nul. Donc, d'après [8] on a:

$$det\, S_\Delta(\lambda) = c.exp.\{l(\lambda+1).(\lambda-1)^{-1}\}; \ |c| = 1; \ l = S_p(I - T^*T) \qquad (1.4)$$

THEOREMES D'EQUIVALENCE UNITAIRE

Considérons dans l'espace $L^2_{[0;l]}$ l'opérateur $\hat{T}$ défini comme suit:

$$(\hat{T}f)(x) = f(x) - 2 \cdot e^x \int_x^l e^{-t} f(t)dt. \qquad (2.1)$$

Il est clair que:

$$(I - \hat{T}^*\hat{T}) = \langle .; g \rangle \cdot g; \ (g(x) = \sqrt{2}e^{-x}) \qquad (2.2)$$

$$(I - \hat{T}^*\hat{T}) = \langle .; h \rangle \cdot h; \ (h(x) = \sqrt{2}e^{x-l}) \qquad (2.3)$$

Soit la somme orthogonale $L_2^r = L_{[0;l]}^2 \oplus .... \oplus L_{[0;l]}^2$ (r–fois) , munie du produit scalaire:

$$\langle f ; g \rangle_r = \sum_{j=1}^{r} \int_0^l f_j(x) \cdot \overline{g_j(x)} dx,$$

$$f = (f_1,...,f_r); \ g = (g_1,...,g_r).$$

Définissons dans l'espace L_r^2 l'opérateur:

$$\overline{T}(r) = \hat{T} \oplus .... \oplus \hat{T} \quad (r\text{–fois})$$

par la formule:

$$(\overline{T}(r))(f_1,...,f_r) = (\hat{T}f_1,...,\hat{T}f_r). \qquad (2.4)$$

Des relations précédentes découle immédiatement que:

$$\left(I - \overline{T}^*(r)\overline{T}(r)\right) = \sum_{j=1}^{r} \langle . ; g_j \rangle \cdot g_j ; \ g_j = (0,......,0,g,0,....0). \quad (2.5)$$

$$\left(I - \overline{T}(r)\overline{T}^*(r)\right) = \sum_{j=1}^{r} \langle . ; h_j \rangle \cdot h_j ; \ h_j = (0,......,0,h,0,....0). \quad (2.6)$$

On peut aisément établir que le spectre de l'opérateur $\overline{T}(r)$ est concentré en $a = 1$.

Soit E un espace euclidien de dimension r et $\{e_j\}_{j=1}^r$ une base orthonormée de E. Définissons les opérateurs $\overline{\Phi} \in L(E; L_2^r)$; $\overline{\Psi} \in L(L_2^r; E)$; $\overline{K} \in L(E;E)$ comme suit:

$$\overline{\Psi}(h) = \sum_{j=1}^{r} \langle h; g_j \rangle \cdot e_j ; \ \overline{\Phi}(e_j) = \overline{c} \cdot h_j ; \ \overline{K}(e_j) = -\overline{c} e^{-l} e_j . \qquad (2.7)$$

La constante c est prise dans la formule (1.4) .

On vérifie facilement que l'ensemble:

$$\overline{\Delta}(r) = (L_2^r, E, F, \overline{T}(r), \overline{\Phi}, \overline{\Psi}, \overline{K})$$

est un nœud unitaire et de plus, on a:

$$S_{\overline{\Delta}(r)}(\lambda) = -[\det S_\Delta(\lambda)] \cdot I_E .$$

<u>Théorème 2.1</u>. *Soit T une contraction simple ayant tout son spectre concentré au point $a=1$ et telle que $dim(I-T^*T)H = r \pi +\infty$. Alors T est équivalente à la projection de l'opérateur $\overline{T}(r)$ sur un sous espace invariant.*

<u>Preuve</u>. Remarquons tout d'abord que le point $a = 1$ n'est pas une valeur propre de T. Incluons T dans un nœud simple $\Delta = (H, E, F, T, \Phi, \Psi, K)$. D'après ce qui précède, on peut choisir $E = F = C^r$ ($r = dim(I - T^*T)H$). Puisque $S_\Delta(\lambda)$ est une matrice carrée holomorphe et contractante sur le disque unité ouvert D; alors d'après [6], elle admet un multiple scalaire. Il existe donc une matrice carrée $S_1(\lambda)$ holomorphe et contractante sur le disque unité ouvert D et telle que $[\det S_\Delta(\lambda)] \cdot I_E = S_1(\lambda) S_\Delta(\lambda)$.

La matrice carrée $[-S_1(\lambda)]$ étant holomorphe et contractante sur le disque unité ouvert D, il existe d'après le théorème 5.1 [7] un nœud unitaire simple $\Delta_1 = (H_1, E, F, T_1, \Phi_1, \Psi_1, K_1)$ tel que $S_{\Delta_1}(\lambda)$ soit égale à $[-S_1(\lambda)]$ pour tout $\lambda \in D$.

Soit $\Delta_2 = \Delta \, \Delta_1$ le couplage des nœuds Δ et Δ_2.On a:

$$\Delta_2 = \Delta\Delta_1 = (H_2, E, F, T_2, \Phi_2, \Psi, K_2);$$

$$(H_2 = H \oplus H_1, \ T_2 = TP + T_1P_1 + \Phi\Psi_1P_1)$$

Toujours d'après [7], le couplage $\Delta_2 = \Delta \, \Delta_1$ est simple.

Désignons par $\overline{\Delta}_1(r) = (\overline{L}_2^r, E, E, \overline{T}_1(r), \overline{\Phi}_1, \overline{\Psi}_1, \overline{K}_1)$ la partie simple de $\overline{\Delta}(r)$. D'après les théorèmes **A** et **C**, on a:

$$S_{\Delta_2}(\lambda) = -S_1(\lambda) S_\Delta(\lambda) = S_{\overline{\Delta}_1(r)}(\lambda) = S_{\overline{\Delta}(r)}(\lambda).$$

Les nœuds simples Δ_2 et $\overline{\Delta}_1(r)$ ont donc la même fonction caractéristique et par conséquent, il existe d'après le théorème **B** un opérateur unitaire U défini de H_2 dans $\overline{L}_r^2$ tel que $T_2 = U^{-1}\overline{T}_1(r)U$.

Considérons le sous espace $Y = U(H)$. Pour tout $y = U(x)$ ($x \in H$), on a:

$$\overline{T}(r)(U(x)) = \overline{T}_1(r)(U(x)) = UT_2U^{-1}(U(x))$$
$$= UT_2(x) = UT(x) = UTU^{-1}(U(x))$$

(car $T_2(x) = T(x) \in H$, pour $x \in H$).

Les dernières relations montrent que Y est invariant par rapport à $\overline{T}(r)$ et que dans Y, l'opérateur $\overline{T}(r)$ induit un opérateur unitairement équivalent à T. Le théorème est ainsi démontré.

De ce qui précède, découle immédiatement le résultat suivant.

<u>Théorème 2.2</u>. *Soit T une contraction simple ayant tout son spectre concentré en un point a situé sur le cercle unité et telle que $dim(I-T^*T)H \, \pi +\infty$. Alors, T est unitairement équivalente à la projection de l'opérateur $a\overline{T}(r)$ sur un sous espace invariant.*

Considérons maintenant l'espace $L_r^{(\infty)}$ défini par:

$$L_r^{(\infty)} = \left\{ f = (f_j)_{j=1}^{+\infty} : f_j \in L_{[0;l]}^2 ; \sum_{j=1}^{+\infty} \|f_j\|^2 \ \pi +\infty \right\}.$$

Le produit scalaire dans $L_r^{(\infty)}$ est donné par la formule:

$$\langle f ; g \rangle_{+\infty} = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^l f_j(x) \cdot \overline{g_j(x)} dx, \ f = (f_j)_{j=1}^{+\infty}; \ g = (g_j)_{j=1}^{+\infty}.$$

Dans $L_2^{(\infty)}$, définissons l'opérateur : $\overline{T} = \hat{T} \oplus \hat{T} \oplus ...$

<u>Proposition 2.3</u>. *Pour tout naturel r, l'espace L_2^r peut être considéré comme un sous espace de $L_2^{(+\infty)}$. Dans ce cas, l'opérateur $\overline{T}(r)$ est la restriction à L_2^r de l'opérateur $\overline{T}$.*

<u>Preuve</u>. Immédiate du fait que l'opérateur :

$$V : L_2^r \to L_2^{(+\infty)}; V(f_1,....,f_r) = (f_1,....,f_r,0,....)$$

définit une isométrie de L_2^r dans $L_2^{(+\infty)}$.

En utilisant cette proposition et le théorème 2.2, on peut facilement établir le résultat final suivant.

<u>Théorème 2.4</u>. *Soit T une contraction simple ayant tout son spectre concentré en un point a situé sur le cercle unité et telle que* $dim(I-T^{*}T)H \, \pi +\infty$. *Alors, T est unitairement équivalente à la projection de l'opérateur* $a\overline{T}$ *sur un sous espace invariant.*

BIBLIOGRAPHIE

[1]- Issaev L.E., "On a class of operators with spectrum concentrated in zero", *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, 178 (1968), p. 783-785.

[2]- Livchits M.S. and Yansévitch A.A., "Operator colligations in Hilbert spaces", Edition de l'université de Khar'kov, (1971) (translated by the Amer. Math. Soc., Winston, 1979).

[3]- Abbaoui L., "Application de la théorie spectrale des opérateurs non autoadjoints dans l'étude des champs aléatoires non homogènes", Thèse de doctorat (en Russe), Khar'kov (1984).

[4]- Kirchev P.K. and Zolotarev V.A., "Non stationnary curves in Hilbert spaces and their correlation functions", *J. Integr. Equat. Oper. Th.,* Vol. 19, (1994) Birkhausser Verlag Basel.

[5]- Abbaoui L. and Yansévitch A.A., "Quelques classes de champs aléatoires non homogènes", Publication de l'Institut Ukrainien de la recherche scientifique, num. 2206, (1984) (en Russe).

[6]- Béla SZ. Nagy and Ciprian Foias, "Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert", Académiai Kiado, Budapest (1967) (en Français).

[7]- Brodskii M.S., "Nœuds unitaires et leurs fonctions caractéristiques", Uspekhi Mat. Nauk. Edition 4, tome 33, (1978), p.141-168 (en Russe).

[8]- Zolotarev V.A., "Méthode des systèmes ouverts. Modèles triangulaires et fonctionnels des systèmes commutants à deux opérateurs". Ukr.NIINTI, num. 412 Yk-D84, Khar'kov (1983) (en russe).