Détermination d'Altitudes par GPS / Nivellement. Application : Régions d'Oran et de Constantine.

A. ZEGGAI, S. MEDJAHED, S.A. BEN AHMED, B. GHEZALI,
R. AIT AHMED LAMARA, A. AYOUAZ, H. TAIBI
Centre National des Techniques Spatiales - Division de géodésie
BP, 13 Arzew - 31200 – Algérie

Résumé : Les résultats prometteurs obtenus dans de nombreux projets de nivellement par GPS permettent de considérer cette technique comme une alternative relativement précise qui fonctionne aussi bien sur toutes les longueurs de base que sur tous les types de terrains découverts. Les altitudes qui résultent du système GPS sont des altitudes ellipsoïdiques (WGS 84) et leur expression par rapport au niveau moyen de la mer (altitudes orthométriques) nécessite la connaissance de l'ondulation du géoïde.

Les tests effectués ont porté sur l'ajustement des altitudes orthométriques de deux réseaux locaux situés dans les régions d'Oran et de Constantine. Les hauteurs ellipsoïdiques sont transformées en altitudes orthométriques par le biais de surfaces de géoïde corrigées et adaptées pour chaque région. La précision des résultats obtenus est de l'ordre de quelques centimètres.

Mots clés : nivellement, géoïde, altitude orthométrique, altitude ellipsoïdique, GPS.

Abstract : The promising results obtained in many GPS levelling projects permit to consider this technique like a relatively precise alternative which operates as well over all baselines as on all the types of discovered terrain. Heights which result from GPS system are ellipsoidal height (WGS 84) and their expression compared to the mean sea level (orthometric heights) requires the knowledge geoid undulation.

The tests carried out related to the adjustment of orthometric heights of two local networks located in the Oran and Constantine regions. The ellipsoid heights are transformed into orthometric heights by the means of corrected geoid surfaces and adapted for each area. The precision of the results obtained is about a few centimeters.

Key words : levelling, geoid, orthometric height, ellipsoid height, GPS.

1. Introduction

La technique de nivellement direct étant très précise mais ne répond pas aux besoins de travaux de grandes envergures à cause de la propagation des erreurs et des délais impartis à la mise en place de longs cheminements. A cette technique traditionnelle de nivellement, s'est substituée une nouvelle technique, basée sur l'utilisation de satellites artificiels GPS (Global Positioning System), plus évoluée. Elle permet de s'affranchir de toutes les contraintes classiques et offre, en plus des avantages techniques un gain en temps, en précision et en coût considérables.

Néanmoins, le GPS ne permet pas de fournir directement les altitudes orthométriques. En effet, l'altitude obtenue par la technique GPS est une hauteur ellipsoïdique, purement géométrique, c'est à dire la distance entre le repère au sol et l'ellipsoïde de référence. La transformation de cette composante en hauteur orthométrique exige nécessairement l'information sur l'ondulation du géoïde de précision compatible à celle obtenue par le GPS (centimétrique).

En d'autre terme, la détermination des altitudes orthométriques par GPS nécessite la combinaison du géoïde et des données issues du GPS (altitudes ellipsoïdiques) et du nivellement de précision (altitudes orthométriques). La précision des résultats est tributaire de la qualité du modèle du géoïde (local ou global), des coordonnées des points exprimées dans le système géodésique et (WGS 84), du réseau de nivellement national (NGA) et de la densité et la répartition géographique des points.

2. Principe du GPS / Nivellement

Un point issu d'une technique spatiale fournit une hauteur ellipsoïdale (h_e) ou hauteur géométrique. Si de plus, en ce point la côte ou hauteur du géoïde (**N**) est connue, on pourra en déduire l'altitude orthométrique (**H**).

Les hauteurs obtenues par nivellement géométrique sont référencées à une surface équipotentielle de pesanteur qui est le géoïde.
Ces hauteurs sont appelées altitudes orthométriques. Par contre, les hauteurs déterminées par GPS sont référencées à une surface géométrique théorique qui est l'ellipsoïde WGS 84. Ces hauteurs sont des hauteurs ellipsoïdiques et appelées parfois "altitudes GPS".
Théoriquement, l'ondulation du géoïde (**N**) est liée aux altitudes ellipsoïdale ($\mathbf{h_e}$) et orthométrique (**h**) par la relation :

$$N = h_e - H$$

Les quantités h_e et N sont exprimées dans le même système de référence. L'équation ci-dessus, suppose que pour chaque point, d'une part, la normale et la verticale au géoïde sont confondues (déviation de la verticale nulle), et d'autre part, les courbures de la verticale et de la normale sont nulles. La relation est donc supposée en première approximation linéaire et par conséquent les trois grandeurs sont parfaitement liées.

La figure suivante (1) illustre la relation entre les trois grandeurs fondamentales du nivellement :

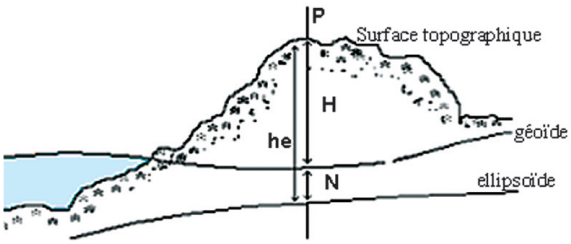

Fig. 1 Relation ente H, h_e et N.

En pratique, cette relation n'est jamais satisfaite à cause de plusieurs facteurs dont les principaux sont :

- Les erreurs aléatoires dans les altitudes h_e, H et N.
- Les inconsistances des datums inhérents aux différents types d'altitudes.
- Les effets systématiques et les distorsions dans les données d'altitudes.
- Les hypothèses et les approximations théoriques introduites dans le traitement des données observées.

En général, la plupart de ces discordances sont attribuées aux erreurs de grandes longueurs d'onde introduites par l'utilisation d'un modèle global dans le calcul d'un géoïde gravimétrique et qui n'est pas forcément optimal dans la zone en question, aux erreurs systématiques et aux inconsistances des datums inhérents aux différents types d'altitudes.

En pratique, ces erreurs sont modélisées et absorbées par l'utilisation d'un *modèle paramétrique de surface de correction* dans l'ajustement combiné des réseaux GPS, nivellement et géoïde.

3. Adaptation du géoïde aux points GPS – nivelés :

Modèles de surface de correction

Le modèle mathématique d'ajustement combiné de données GPS, nivellement et géoïde, proposé dans cet article, est donné par l'expression suivante :

$$h_{ei} - H_i - N_i^{GRAV} = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = \Delta N_i = a_i^T x + v_i$$

N_i^{GPS} : Hauteur du géoïde obtenue par nivellement / GPS au point i .

N_i^{GRAV} : Hauteur du géoïde obtenue par voie gravimétrique au point i .

x, a_i^T et v_i représentent respectivement le vecteur de nx1 paramètres inconnus, le tableau de nxm coefficients connus et le terme supposé comme étant un bruit aléatoire résiduel [Kotsakis, Sideris 1999].

Les modèles de surface de correction adoptés dans cet article sont les suivants :

Modèle à quatre (04) paramètres

Le modèle à quatre paramètres, exprimé en coordonnées cartésiennes (X, Y, Z), s'écrit :

$$a_i^T x = \frac{X_i}{r} T_x + \frac{Y_i}{r} T_y + \frac{Z_i}{r} T_z + kr$$

Où r, (T_X,T_Y,T_Z) et k représentent respectivement la rayon moyen de la terre, le vecteur de translations et le facteur d'échelle.

Ce modèle peut être aussi représenté en coordonnées géographiques (λ, φ) de la manière suivante [Duquenne et al. 1995] :

$$a_i^T x = \cos\varphi_i \cos\lambda_i T_x + \cos\varphi_i \sin\lambda_i T_y + \sin\varphi_i T_z + kr$$

Comme :

$$a_i^T x + v_i = \Delta N_i = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = he_i - H_i - N_i^{GRAV}$$

D'où le modèle de surface de correction à 4 paramètres :

$$\Delta N_i = a_0 + a_1 \cos\varphi_i \cos\lambda_i + a_2 \cos\varphi_i \sin\lambda_i + a_3 \sin\varphi_i + v_i$$

Avec : $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (kr, T_x, T_y, T_z)$: inconnues.

Modèle à cinq (05) paramètres

Le modèle à cinq (05) paramètres, donné par [Heiskanen et Moritz,1967, Sideris,1992], est :

$$\Delta N_i = a_0 + a_1 \cos\varphi_i \cos\lambda_i + a_2 \cos\varphi_i \sin\lambda_i + a_3 \sin\varphi_i + a_4 \sin^2\varphi_i + v_i$$

Remarque : L'adaptation se réalise par moindres carrés sur tous les points GPS-nivelés en ajustant les coefficients de transformations (a_0, a_1, a_2, a_3) ou $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$. Ces coefficients n'ont pas de signification précise, l'objectif étant seulement de mettre le mieux possible en correspondance les deux surfaces (géoïde obtenu par nivellement / GPS et géoïde obtenu par voie gravimétrique) à l'ensemble des points communs.

4. Algorithme de traitement

La solution est donnée par la combinaison des hauteurs ellipsoïdales obtenues par GPS, des altitudes orthométriques fournies par le nivellement de précision et d'un modèle de géoïde (local ou global).
La méthode suppose la parfaite détermination du nivellement sur les points de référence et des mesures de lignes de bases GPS pour que la relation $N_{GPS} = (h_{eGPS} - H_{nivellement})$ ne soit affectée d'aucune erreur.

Les étapes de calcul sont les suivantes :

1ère étape : Calcul de l'ondulation du géoïde par GPS / Nivellement.

$$N_i^{GPS} = h_{ei} - H_i$$

Avec :

$1 \le i \le n$ où n représente le nombre de points GPS nivelés.

2ème étape : Interpolation bilinéaire des ondulations du géoïde obtenues par voie gravimétrique sur les points GPS à partir d'une grille de géoïde local ou global :

$$N_i^{GRAV} = \text{interpolation_géoïde_grav.}(\lambda_i, \varphi_i)$$

3ème étape : Calcul de la différence entre le géoïde obtenu par GPS / Nivellement et le géoïde gravimétrique local ou le géoïde global :

$$\Delta N_i = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = he_i - H_i - N_i^{GRAV}$$

4ème étape : Ajustement des paramètres de transformation par la méthode des moindres :

$$X = (A^T.A.)^{-1}.A^T.B$$

Avec :

$$X = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T \text{ ou } (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$$

5ème étape : Evaluation de l'ondulation du géoïde corrigé sur les points nouveaux :

$$N_{corrigé} = N_{GRAV} + C$$

Où C est une la correction qui représente la fonction des paramètres de transformation (a_0, a_1, a_2, a_3) ou $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ et des coordonnées géographiques (φ, λ) du point considéré.

6ème étape : Calcul de l'altitude orthométrique des points nouveaux :

$$H = h_e - N_{corrigé}$$

5. Application : Régions d'Oran et de Constantine

L'altitude orthométrique (H_{ortho}) peut être évaluée de la manière suivante :

$$H_{ortho} = h_{eWGS84} - (N_{gravimétrique} + C)$$

Avec :

C : correction à apporter au géoïde gravimétrique qui est obtenue par le modèle de surface de correction à 4 ou 5 paramètres.

h_{eWGS84} : hauteur ellipsoïdique (altitude GPS).

$N_{gravimétrique}$: Hauteur du géoïde obtenue par voie gravimétrique (modèle local) ou par le modèle global.

5.1 Région d'Oran

Les données utilisées dans le traitement sont constituées de 34 points doubles répartis sur la région d'Oran, dont 19 points ont été choisis comme points de référence pour le calcul des paramètres de transformation et 15 points ont été considérés comme points de contrôle pour l'évaluation de la précision de l'ajustement. Le modèle de géoïde adopté à travers cette application est le géoïde gravimétrique local calculé par collocation. Les limites de la zone de travail, exprimées en coordonnées géographiques (φ, λ) sont :

$35°3255 \le \varphi \le 35°5745$ et $-0°5059 \le \lambda \le 0°0739$

Les tableaux suivants (1 et 2) résument les statistiques des écarts des altitudes orthométriques obtenus au niveau des 15 points de contrôle.

Tableau 1. Statistiques sur les altitudes orthométriques ajustées *(modèle à 4 paramètres).*

Modèle du géoïde	Ecart ΔH_{ortho} *(Oran)*			
	Min (m)	Max (m)	Moy (m)	RMS (m)
Modèle local (collocation)	-0.064	0.142	0.039	0.069

L'écart ΔH_{ortho} représente la différence entre les altitudes orthométriques ajustées par le modèle à 04 paramètres et celles obtenues par nivellement de précision sur les points de contrôle.

La moyenne des écarts en altitude orthométrique obtenue au niveau des 15 points de contrôle est de l'ordre de 4 cm ; l'écart type moyen de ces écarts est de ≈7 cm.

Tableau 2. Statistiques sur les altitudes orthométriques ajustées *(modèle à 5 paramètres).*

Modèle du géoïde	Ecart ΔH_{ortho} *(Oran)*			
	Min (m)	Max (m)	Moy (m)	RMS (m)
Modèle local (collocation)	-0.048	0.083	0.018	0.040

La moyenne des écarts en altitude orthométrique obtenue par le modèle à 5 paramètres est de l'ordre de 2 cm. Nous remarquons que la précision moyenne obtenue sur ΔH_{ortho} est de meilleure qualité (≈4 cm).

La figure suivante (2) représente les ondulations du géoïde corrigé de la région d'Oran.

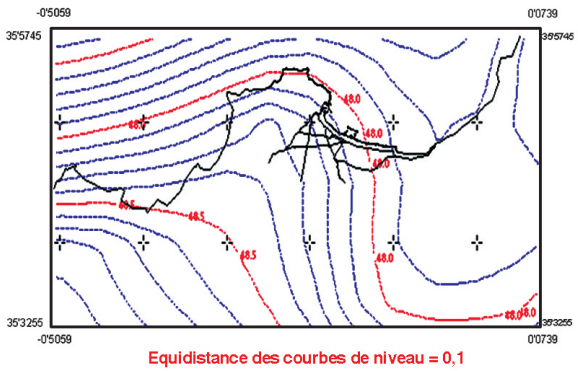

Fig. 2 Surface du géoïde corrigé de la région d'Oran.

5.2 Région de Constantine

Le réseau qui a servi à cette application est composé 15 points doubles dont 6 points d'appui et 9 points de contrôle. Le modèle de géoïde adopté pour cette zone d'étude est le géoïde gravimétrique local obtenu par collocation.

Les limites de la zone d'expérimentation, exprimées en coordonnées géographiques (φ, λ) sont :

$$36°1226 \leq \varphi \leq 35°3022 \text{ et } 6°2360 \leq \lambda \leq 6°4815$$

Les tableaux suivants (3 et 4) représentent les statistiques des écarts des altitudes orthométriques obtenus au niveau des 09 points de contrôle.

Tableau 3. Statistiques sur les altitudes orthométriques ajustées *(modèle à 4 paramètres).*

Désignation	Ecart ΔH_{ortho} *(Constantine)*			
	Min (m)	Max (m)	Moy (m)	RMS (m)
Modèle local (collocation)	-0.096	0.038	-0.029	0.057

Tableau 4. Statistiques sur les altitudes orthométriques ajustées *(modèle à 5 paramètres).*

Désignation	Ecart ΔH_{ortho} *(Constantine)*			
	Min (m)	Max (m)	Moy (m)	RMS (m)
Modèle local (collocation)	-0.100	0.072	-0.014	0.054

Les résultats obtenus montrent que la précision moyenne des écarts en altitude orthométrique (ΔH_{ortho}) obtenue par chaque modèle d'ajustement (04 et 05 paramètres) sur les points de contrôle est identique (≈6 cm).

D'après les tableaux (2 et 4), nous remarquons que l'écart type sur les écarts ΔH_{ortho} obtenu dans la région d'Oran (tableau 2) est de meilleure qualité que celui obtenu dans la région de Constantine (tableau 4). Ceci est dû principalement, au nombre restreint de points d'appui utilisé dans la zone de Constantine.

La figure (3) illustre la surface du géoïde corrigé de la région de constantine.

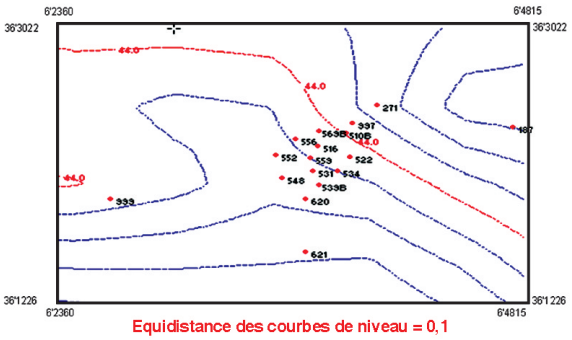

Fig. 3 Surface du géoïde corrigé de la région de Constantine.

6. Conclusion

Les travaux de nivellement par GPS menés par la division de géodésie (CNTS) avec des récepteurs bi-fréquences ASHTECH Z-XII, montrent que les résultats obtenus par l'intégration de données de nivellement de précision et d'un géoïde gravimétrique déterminé par collocation, peuvent atteindre un niveau de précision centimétrique.

La précision sur les altitudes orthométriques déterminées par la technique GPS / Nivellement reste tributaire de :

- La fiabilité des données gravimétriques et du modèle de calcul du géoïde (local ou global).
- La précision des mesures GPS et la puissance du logiciel de traitement.
- La qualité du réseau de nivellement (NGA).
- Du modèle de surface de correction ou d'adaptation du géoïde aux points GPS–nivelés
- Les inconsistances des datums propres aux différents types d'altitudes.
- La densité et la répartition géographique des points de référence.

Références

Giussepe Birardi, Domenico Santarsiero, Donato Tufillaro, Luciano Surace, 1995 : *Setting-up local ''mapping geoids'' with the aid of GPS / LEV traverses. Apllication to the geoids of Sardinia and Calabria.* Journal of Geodesy edition Springer-Verlag.

C. Kotsakis, M.G.Sideris, 1999 : *On the adjustment of combined GPS / levelling / geoid networks.* Journal of Geodesy edition Springer Verlag.

Zhiheng Jiang and Henry Duquenne, 1996 : *On the combined adjustment of gravimetrically determined geoid and GPS levelling stations.* Journal of Geodesy edition Springer Verlag.

S. A. Medjahed, Février 2006 : *Intégration des données GPS, Nord Sahara et nivellement en vue d'une transformation tridimensionnelle (Cas de l'Algérie).* Mémoire de magister. CNTS / ARZEW.

A. Zeggai, Juillet 1996 : *Intégration des données GPS en nivellement.* Thèse de Magister. CNTS / ARZEW.